

Série de TD : Résolution des Systèmes Linéaires (Méthodes Directes)

Exercice 1 : Les Fondamentaux (Cramer & Inversion)

Soit le système linéaire (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous la forme matricielle $AX = B$.
2. Calculer le déterminant de A . Le système admet-il une solution unique ?
3. **Méthode de Cramer** : Résoudre le système en calculant les déterminants D_x, D_y, D_z .
4. **Inversion Matricielle** : Calculer A^{-1} en utilisant la méthode de la comatrice, puis déduire le vecteur solution X par $X = A^{-1}B$.

Exercice 2 : Systèmes Triangulaires

Résoudre les systèmes suivants (sans utiliser Gauss ou Cramer) :

1. **Système Triangulaire Inférieur (Descente) :**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

2. **Système Triangulaire Supérieur (Remontée) :**

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Décomposition LU (Doolittle vs Crout)

Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \\ 4 & 11 & 26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 28 \\ 67 \end{pmatrix}$$

1. **Méthode de Doolittle** : Décomposer A sous la forme $A = LU$ où L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale ($L_{ii} = 1$) et U est triangulaire supérieure.
2. **Méthode de Crout** : Décomposer A sous la forme $A = LU$ où U est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale ($U_{ii} = 1$) et L est triangulaire inférieure.
3. En utilisant la décomposition de Doolittle, résoudre le système $AX = B$ en résolvant successivement $LY = B$ puis $UX = Y$.

Exercice 4 : Méthode de Cholesky

Soit la matrice symétrique M :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que M est Symétrique Définie Positive (critère de Sylvester ou calcul des valeurs propres).
2. Déterminer la matrice L (triangulaire inférieure) telle que $M = LL^T$ (Méthode de Cholesky).
3. Utiliser cette décomposition pour résoudre $MX = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 73 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 : Élimination de Gauss et Stratégies de Pivot

Soit le système (S_2) dépendant d'un paramètre ϵ (proche de 0) :

$$(S_2) : \begin{cases} \epsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

1. **Gauss naïf** : Appliquer l'élimination de Gauss sans changer l'ordre des lignes. Si ϵ est très petit (10^{-10}), expliquer pourquoi une erreur numérique peut survenir sur ordinateur.
2. **Pivot nul** : Que se passe-t-il si $\epsilon = 0$?
3. **Pivotement Partiel** : Résoudre le système en appliquant la stratégie du pivot partiel (échange de lignes pour avoir le plus grand élément en valeur absolue comme pivot).
4. **Mise à l'échelle (Scaling)** : Expliquer brièvement l'intérêt de diviser chaque ligne par son élément maximal avant de choisir le pivot (point 5.4.2).

Exercice 6 : Gauss-Jordan et Inversion

Soit la matrice C :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Appliquer la méthode de Gauss-Jordan pour transformer la matrice augmentée $[C|I]$ en $[I|C^{-1}]$.
2. En déduire l'inverse C^{-1} .
3. Vérifier le résultat en calculant $C \times C^{-1}$.

Exercice 7 : Systèmes Triangulaires par Blocs

Objectif : Manipulation de matrices partitionnées.

On souhaite résoudre un système linéaire $Mz = d$ où la matrice M est triangulaire inférieure par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

Où :

- A est une matrice carrée $p \times p$ inversible,
- B est une matrice carrée $q \times q$ inversible,
- C est une matrice rectangulaire $q \times p$.

Le vecteur z est partitionné en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$, et le vecteur second membre est $d = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

1. Développer le produit matriciel pour obtenir un système de deux équations matricielles couplées.
2. Montrer que l'on peut résoudre ce système en résolvant successivement deux systèmes linéaires plus petits. Lequel doit-on résoudre en premier ?
3. **Application :** Résoudre le système suivant en utilisant la méthode par blocs (sans inverser la matrice 4×4 directement) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Indice : Poser A comme le bloc 2×2 en haut à gauche).

Correction de la Série de TD
Résolution des Systèmes Linéaires

Exercice 2 : Systèmes Triangulaires

L'objectif est de maîtriser la "remontée" et la "descente", étapes finales de toutes les méthodes directes.

1. Système Triangulaire Inférieur (Méthode de Descente)

Nous avons $Lx = b$. On calcule les inconnues du haut vers le bas ($x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$).

$$\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Étape 1 : Trouver x_1

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

Étape 2 : Trouver x_2 en remplaçant x_1

$$3(2) + 4x_2 = 14 \implies 6 + 4x_2 = 14 \implies 4x_2 = 8 \implies x_2 = 2$$

Étape 3 : Trouver x_3 en remplaçant x_1 et x_2

$$1(2) + 2(2) + 3x_3 = 14 \implies 2 + 4 + 3x_3 = 14 \implies 3x_3 = 8 \implies x_3 = \frac{8}{3}$$

Solution : $X = (2, 2, \frac{8}{3})^T$

2. Système Triangulaire Supérieur (Méthode de Remontée)

Nous avons $Ux = b$. On calcule les inconnues du bas vers le haut ($x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$).

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_3 = 8 \end{cases}$$

Étape 1 : Trouver x_3

$$x_3 = \frac{8}{4} = 2$$

Étape 2 : Trouver x_2

$$2x_2 + 3(2) = 8 \implies 2x_2 = 8 - 6 \implies 2x_2 = 2 \implies x_2 = 1$$

Étape 3 : Trouver x_1

$$5x_1 + 2(1) + 1(2) = 12 \implies 5x_1 + 4 = 12 \implies 5x_1 = 8 \implies x_1 = \frac{8}{5}$$

Solution : $X = (1.6, 1, 2)^T$

Exercice 3 : Décomposition LU

Note Importante : En vérifiant les calculs de la matrice proposée initialement, le déterminant est nul ($A_{33} = 26$), ce qui rend la résolution impossible. Pour les besoins pédagogiques, nous utilisons $A_{33} = 28$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \\ 4 & 11 & 28 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 28 \\ 67 \end{pmatrix}$$

1. Méthode de Doolittle ($L_{ii} = 1$)

On cherche $A = LU$ avec L ayant des 1 sur la diagonale.

Algorithme :

- **Ligne 1 de U :** $u_{11} = 2, \quad u_{12} = 1, \quad u_{13} = 4$
- **Colonne 1 de L** (diviser par u_{11}) :

$$l_{21} = 2/2 = 1, \quad l_{31} = 4/2 = 2$$

- **Ligne 2 de U :**

$$u_{22} = 4 - (1)(1) = 3, \quad u_{23} = 10 - (1)(4) = 6$$

- **Colonne 2 de L :**

$$l_{32} = \frac{11 - (2)(1)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

- **Ligne 3 de U :**

$$u_{33} = 28 - (2 \times 4 + 3 \times 6) = 28 - 26 = 2$$

Résultat Doolittle :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Méthode de Crout ($U_{ii} = 1$)

On cherche $A = LU$ avec U ayant des 1 sur la diagonale.

Calculs :

- Col 1 de L : $l_{11} = 2, \quad l_{21} = 2, \quad l_{31} = 4$.
- Ligne 1 de U : $u_{12} = 1/2, \quad u_{13} = 2$.
- Col 2 de L : $l_{22} = 3, \quad l_{32} = 9$.
- Ligne 2 de U : $u_{23} = (10 - 4)/3 = 2$.
- Col 3 de L : $l_{33} = 28 - (8 + 18) = 2$.

Résultat Crout :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Résolution $AX = B$ (via Doolittle)

On résout $LY = B$ puis $UX = Y$.

a) **Descente** $LY = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 28 \\ 67 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 12$$

$$y_2 = 28 - 12 = 16$$

$$y_3 = 67 - (2(12) + 3(16)) = 67 - 72 = -5$$

$$Y = (12, 16, -5)^T$$

b) Remontée $UX = Y$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$2x_3 = -5 \implies x_3 = -2.5$$

$$3x_2 + 6(-2.5) = 16 \implies 3x_2 = 31 \implies x_2 \approx 10.33$$

$$2x_1 + 10.33 + 4(-2.5) = 12 \implies 2x_1 = 11.66 \implies x_1 \approx 5.83$$

Exercice 4 : Méthode de Cholesky

Cette méthode ne s'applique qu'aux matrices Symétriques Définies Positives (SDP).

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{pmatrix}$$

1. Vérification (Critère de Sylvester)

Calculons les déterminants des sous-matrices principales :

- $\Delta_1 = |4| = 4 > 0$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 > 0$
- $\Delta_3 = \det(M) = 900 > 0$.

La matrice est bien définie positive.

2. Décomposition $M = LL^T$

Formules : $l_{jj} = \sqrt{m_{jj} - \sum l_{jk}^2}$ et $l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}(m_{ij} - \sum l_{ik}l_{jk})$.

- **Colonne 1** : $l_{11} = 2, \quad l_{21} = -1, \quad l_{31} = 1$.
- **Colonne 2** : $l_{22} = \sqrt{10 - 1} = 3, \quad l_{32} = (-7 - (-1))/3 = -2$.
- **Colonne 3** : $l_{33} = \sqrt{30 - (1 + 4)} = 5$.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Résolution $MX = B$

Avec $B = (8, -11, 73)^T$. On résout $LY = B$ puis $L^T X = Y$.

a) **Descente** $LY = B$:

$$\begin{cases} 2y_1 = 8 \implies y_1 = 4 \\ -y_1 + 3y_2 = -11 \implies -4 + 3y_2 = -11 \implies 3y_2 = -7 \implies y_2 = -7/3 \\ y_1 - 2y_2 + 5y_3 = 73 \implies 4 - 2(-7/3) + 5y_3 = 73 \end{cases}$$

$$5y_3 = 73 - 4 - 14/3 = 69 - 4.66 \approx 64.33 \implies y_3 \approx 12.86$$

b) **Remontée** $L^T X = Y$: La matrice L^T est triangulaire supérieure :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2.33 \\ 12.86 \end{pmatrix}$$

En résolvant du bas vers le haut :

- $5x_3 = 12.86 \implies x_3 \approx 2.57$
- $3x_2 - 2(2.57) = -2.33 \implies 3x_2 = -2.33 + 5.14 = 2.81 \implies x_2 \approx 0.94$
- $2x_1 - 0.94 + 2.57 = 4 \implies 2x_1 = 4 + 0.94 - 2.57 = 2.37 \implies x_1 \approx 1.18$

1 Correction : Systèmes Triangulaires par Blocs

Note Pédagogique : Cet exercice est fondamental car il illustre la stratégie de "diviser pour régner" utilisée par les solveurs numériques modernes. Pour gérer de très grands systèmes linéaires, on les découpe en "blocs" plus petits afin d'optimiser le calcul (parallélisation) et la gestion de la mémoire.

1. Développement du produit matriciel

Nous cherchons à résoudre le système $Mz = d$ défini par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

En appliquant la règle du produit matriciel (ligne par colonne) par blocs, nous obtenons le système de deux équations vectorielles couplées :

$$\text{Ligne 1 : } A \cdot x + 0 \cdot y = b_1 \implies \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$$

$$\text{Ligne 2 : } C \cdot x + B \cdot y = b_2 \implies \mathbf{Cx} + \mathbf{By} = \mathbf{b}_2$$

2. Stratégie de résolution

Nous observons une structure triangulaire au niveau des blocs :

- La première équation ne dépend **que de** x .
- La seconde dépend de x **et** de y .

L'ordre de résolution est donc imposé (analogie avec la "descente" pour un système triangulaire classique) :

1. **D'abord**, on résout la première équation pour trouver le vecteur x :

$$x = A^{-1}b_1$$

(En pratique, on ne calcule pas l'inverse, on résout le système linéaire $Ax = b_1$).

2. **Ensuite**, on injecte la valeur de x trouvée dans la deuxième équation. Le terme Cx devient un vecteur connu que l'on passe au second membre :

$$By = b_2 - Cx$$

On résout alors ce nouveau système pour trouver le vecteur y .

3. Application Numérique

Résolvons le système 4×4 donné :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A. Identification des blocs

On découpe la matrice en 4 blocs de taille 2×2 :

- **Bloc A (haut-gauche)** : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Bloc 0 (haut-droite) : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Bloc C (bas-gauche) : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- Bloc B (bas-droite) : $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs sont découpés de même :

$$\text{Inconnues : } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Seconds membres : } b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B. Étape 1 : Calcul du vecteur x (Résolution de $Ax = b_1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

C'est un petit système triangulaire inférieur.

- Ligne 1 : $1 \cdot x_1 = 2 \implies \mathbf{x}_1 = \mathbf{2}$
- Ligne 2 : $2x_1 + 3x_2 = 7 \implies 2(2) + 3x_2 = 7 \implies 4 + 3x_2 = 7 \implies 3x_2 = 3 \implies \mathbf{x}_2 = \mathbf{1}$

D'où le vecteur partiel :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C. Étape 2 : Calcul du terme de transfert (Cx)

Avant de résoudre pour y , calculons l'impact de x sur le second membre.

$$Cx = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(2) + 1(1) \\ -1(2) + 0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculons le nouveau second membre ($RHS = b_2 - Cx$) :

$$RHS = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ 0 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D. Étape 3 : Calcul du vecteur y (Résolution de $By = RHS$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

C'est un petit système triangulaire supérieur. On remonte (du bas vers le haut).

- Ligne 2 : $0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 2 \implies \mathbf{x}_4 = \mathbf{2}$
- Ligne 1 : $1 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 3 \implies x_3 + 2(2) = 3 \implies x_3 + 4 = 3 \implies \mathbf{x}_3 = \mathbf{-1}$

D'où le vecteur partiel :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solution Finale

En rassemblant les vecteurs x et y , nous obtenons la solution complète Z :

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vérification rapide (facultative) : Prenons la 3^{ème} ligne du système initial : $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$.

$$2 + 1 + (-1) + 2(2) = 2 + 0 + 4 = 6 \quad \checkmark$$