

Série de TD : Résolution des Systèmes Linéaires (Méthodes Directes)

Exercice 1 : Les Fondamentaux (Cramer & Inversion)

Soit le système linéaire (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. Écrire ce système sous la forme matricielle $AX = B$.
2. Calculer le déterminant de A . Le système admet-il une solution unique ?
3. **Méthode de Cramer** : Résoudre le système en calculant les déterminants D_x, D_y, D_z .
4. **Inversion Matricielle** : Calculer A^{-1} en utilisant la méthode de la comatrice, puis déduire le vecteur solution X par $X = A^{-1}B$.

Exercice 2 : Systèmes Triangulaires

Résoudre les systèmes suivants (sans utiliser Gauss ou Cramer) :

1. **Système Triangulaire Inférieur (Descente) :**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

2. **Système Triangulaire Supérieur (Remontée) :**

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Décomposition LU (Doolittle vs Crout)

Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \\ 4 & 11 & 26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 28 \\ 67 \end{pmatrix}$$

1. **Méthode de Doolittle** : Décomposer A sous la forme $A = LU$ où L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale ($L_{ii} = 1$) et U est triangulaire supérieure.
2. **Méthode de Crout** : Décomposer A sous la forme $A = LU$ où U est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale ($U_{ii} = 1$) et L est triangulaire inférieure.
3. En utilisant la décomposition de Doolittle, résoudre le système $AX = B$ en résolvant successivement $LY = B$ puis $UX = Y$.

Exercice 4 : Méthode de Cholesky

Soit la matrice symétrique M :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que M est Symétrique Définie Positive (critère de Sylvester ou calcul des valeurs propres).
2. Déterminer la matrice L (triangulaire inférieure) telle que $M = LL^T$ (Méthode de Cholesky).
3. Utiliser cette décomposition pour résoudre $MX = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 73 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 : Élimination de Gauss et Stratégies de Pivot

Soit le système (S_2) dépendant d'un paramètre ϵ (proche de 0) :

$$(S_2) : \begin{cases} \epsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

1. **Gauss naïf** : Appliquer l'élimination de Gauss sans changer l'ordre des lignes. Si ϵ est très petit (10^{-10}), expliquer pourquoi une erreur numérique peut survenir sur ordinateur.
2. **Pivot nul** : Que se passe-t-il si $\epsilon = 0$?
3. **Pivotement Partiel** : Résoudre le système en appliquant la stratégie du pivot partiel (échange de lignes pour avoir le plus grand élément en valeur absolue comme pivot).
4. **Mise à l'échelle (Scaling)** : Expliquer brièvement l'intérêt de diviser chaque ligne par son élément maximal avant de choisir le pivot (point 5.4.2).

Exercice 6 : Gauss-Jordan et Inversion

Soit la matrice C :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Appliquer la méthode de Gauss-Jordan pour transformer la matrice augmentée $[C|I]$ en $[I|C^{-1}]$.
2. En déduire l'inverse C^{-1} .
3. Vérifier le résultat en calculant $C \times C^{-1}$.

Exercice 7 : Systèmes Triangulaires par Blocs

Objectif : Manipulation de matrices partitionnées.

On souhaite résoudre un système linéaire $Mz = d$ où la matrice M est triangulaire inférieure par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

Où :

- A est une matrice carrée $p \times p$ inversible,
- B est une matrice carrée $q \times q$ inversible,
- C est une matrice rectangulaire $q \times p$.

Le vecteur z est partitionné en $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$, et le vecteur second membre est $d = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

1. Développer le produit matriciel pour obtenir un système de deux équations matricielles couplées.
2. Montrer que l'on peut résoudre ce système en résolvant successivement deux systèmes linéaires plus petits. Lequel doit-on résoudre en premier ?
3. **Application :** Résoudre le système suivant en utilisant la méthode par blocs (sans inverser la matrice 4×4 directement) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Indice : Poser A comme le bloc 2×2 en haut à gauche).