تقدير متوسط المجتمع باستخدام التوزيع الطبيعي

كثيراً ما يتم تقدير معامل المجتمع باستخدام إحصائيات العينة بسبب عوامل التكلفة والوقت والإمكانيات. وتسمى القيمة المعينة المشاهدة تقدير. وعندما نعبر عن تقدير معلمة المجتمع بعدد واحد فإنه يسمى تقدير بنقطة فمثلا متوسط العينة $\overline{X}$، هو مقدر لوسط المجتمع μ

أما التقدير بفترة فيشير إلى مدى من القيم مقرونا باحتمال أن يضم هذا المدى (الفترة) معلمة المجتمع غير المعروفة ، ويسمى هذا الاحتمال مستوى الثقة . وتقدير متوسط المجتمع باستخدام التوزيع الطبيعي عند فترة الثقة 95% مثلا لوسط المجتمع غير المعروف كالآتى :

$$P\left(\overline{X} - Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sigma_{\overline{X}} \leq \mu \leq \overline{X} + Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sigma_{\overline{X}}\right) = P\left(\overline{X} - 1.96\sigma_{\overline{X}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96\sigma_{\overline{X}}\right) = 0.95 = 95\%$$

ملاحظات:

ملاحظة 1:

كيفية حساب $\sigma_{\overline{X}}$ تمّ التعرض له في محاضرة توزيع المعاينة.

ملاحظة 2:

تساؤل: في أي ظروف يمكن تكوين فترات الثقة للوسط غير المعلوم للمجتمع من عينة عشوائية مسحوبة من المجتمع باستخدام التوزيع الطبيعي ؟

يمكن استخدام التوزيع الطبيعي لتكوين فترات الثقة للوسط غير المعلوم للمجتمع من عينة عشوائية مسحوبة من المجتمع؛ اذا كان:

- الحالة الأولى: إذا كان المجتمع الأصلي طبيعياً، و حجم العينة اكبر او يساوي30 ، و الانحراف المعياري للمجتمع معلوم σ أو الانحراف المعياري للعينة معلوم S؛
- الحالة الثانية: إذا كان حجم العينة اكبر او يساوي 30 (بالاتجاء إلى نظرية النهاية المركزية) و الانحراف المعياري للمجتمع معلوم σ أو الانحراف المعياري للعينة معلوم S ؛
- الحالة الثالثة: إذا كان حجم العينة اقل من 30 ولكن σ معلومة والمجتمع الذي أخذت منه العينة العشوائية من المعروف أنه يتبع التوزيع الطبيعي .

امثلة عن كل حالة

الحالة الأولى:

عينة عشوائية من 30 مفردة بمتوسط 80 وانحراف معياري 40، أخذت من مجتمع عدد مفرداته 1000 وتوزيعه طبيعي. اوجد فترة الثقة 90% لوسط المجتمع غير المعلوم.

الحل:

لدينا:

$$N = 1000$$
$$n = 30$$
$$S = 40$$
$$\bar{X} = 80$$

المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي إذا مجال الثقة لمتوسط المجتمع الغير معلوم هو:

$$\bar{X} - Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sigma_{\bar{X}}$$

وبما أنّ $n < 0{,}05N$ فانّ :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ولأن σ غير معلومة فإن S هي تقدير نقطي لها، إذن :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{40}{\sqrt{30}} \cong 7.30$$

بما أنّ فترة الثقة 90% فانّ $\alpha = 10\%$ ومنه $Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ أي $Z_{0.95}$ تساوي 1.64 (انظر ملحق التوزيع الطبيعي المعياري)ومنه :

$$80 - 1.64(7.30) \leq \mu \leq 80 + 1.64(7.30)$$
$$68.028 \leq \mu \leq 91.972$$

أي أن عند ثقة مقدارها 90%ستكون قيمة متوسط المجتمع تقع بين 68.028و 91.972

الحالة الثانية:

أخذت عينة عشوائية من 36 طالباً من بين 500 طالب بمدرسة ثانوية ، متقدمين لامتحان القبول بالجامعة . ووجد أن متوسط درجات العينة هو 380، والانحراف المعياري للمجتمع كله المكون من 500 طالب هو 40 . أوجد فترة الثقة 95% للوسط غير المعلوم للدرجات في المجتمع كله.

الحل:

لدينا:

$$\boldsymbol{N = 500}$$
$$\boldsymbol{n = 36}$$
$$\boldsymbol{\sigma = 40}$$
$$\boldsymbol{\bar{X} = 380}$$

وبما أنّ حجم العينة كبير (اكبر من 30) فلتقدير معلمة المجتمع الغير معلومة نعتمد على التوزيع الطبيعي.

وبما أنّ $n > 0{,}05N$ فانّ :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{40}{\sqrt{36}}\sqrt{\frac{500-36}{500-1}} \cong \frac{40}{6}(0.96) \cong 6.4$$

ومنه:

$$\bar{X} - Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\sigma_{\bar{X}}$$

$$\bar{X} - 1.96\sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sigma_{\bar{X}}$$

$$380 - 1.96(6.4) \leq \mu \leq 380 + 1.96(6.4)$$

$$367.46 \leq \mu \leq 392.54$$

أي أن عند ثقة مقدارها 95%ستكون قيمة متوسط المجتمع تقع بين 367.46و392.54

الحالة الثالثة:

مجتمع موزع توزيعا طبيعيا، وانحرافه المعياري $\sigma = 11$ ؛ سحبت منه عينة عشوائية حجمها n=26 ومتوسطها هو $\bar{x}$=48 ، أحسب متوسط تقدير المجتمع μ بثقة قدرها 95% .

$$\bar{x} - Z_{(1-\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{(1-\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$48 - (1.96)\frac{11}{\sqrt{26}} \leq \mu \leq 48 + (1.96)\frac{11}{\sqrt{26}}$$

حيث : $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **و من الجدول الموضح في الملحق نجد** $Z_{(1-\alpha/2)} = Z_{0.975} = 1.96$

$$48 - (1.96)\ 2.157 \leq \mu \leq 48 + (1.96)\ 2.157$$

$$43.77 \leq \mu \leq 52.23$$

أي أن عند ثقة مقدارها 95% ستكون قيمة متوسط المجتمع ضمن المجال $[43.77 - 52.23]$.