توزيع المعاينة للوسط الحسابي

تمهيد

إذا سحبنا كل العينات العشوائية البسيطة المتساوية الحجم n من مجتمع محدود ؛ حجمه N ووسطه الحسابي $\bar{X}$ و تباينه σ^2، وقمنا بحساب الوسط الحسابي لكل عينة ثم وضعنا هذه المتوسطات في جدول توزيع احتمالي، فهذا التوزيع الاحتمالي يسمى توزيع المعاينة للوسط الحسابي، اذن توزيع المعاينة لمتوسط العينة هو توزيع احتمالي لجميع متوسطات العينات الممكنة التي يمكن الحصول عليها من مجتمع معين.

لإيجاد المتوسط $\mu_{\bar{X}}$والانحراف المعياري(الخطأ المعياري) $\sigma_{\bar{X}}$لتوزيع المعاينة للمتوسط نحتاج أن نفهم نظريتين هما:

نظرية 1:

متوسط توزيع المعاينة النظري للمتوسط $\mu_{\bar{X}}$ يساوى متوسط المجتمع الأصلي أي $\mu_{\bar{X}} = \mu$

نظرية 2:

الخطأ المعياري للمتوسط $\sigma_{\bar{X}}$ هو الانحراف المعياري للمجتمع σ ، مقسوماً على الجذر التربيعي لحجم العينة ، أي

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وتستخدم هذه الصيغة في حالة:

- ✓ المجتمع المسحوب منه العينة غير محدود
- ✓ المجتمع المسحوب منه العينة محدود ولكن السحب يتم بالارجاع
- ✓ $n < 0.05\ N$

وإذا لم تتوفر الشروط الثلاث السابقة لابد من استخدام معامل التصحيح، وذلك كالاتي:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

ملاحظة معامل التصحيح يساوي:

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال توضيحي1:

من مجتمع مكون من الأعداد الخمسة الآتية: 1، 3 ، 5 ، 7 و 9 . (أ)أوجد التوزيع الاحتمالي للمجتمع ومنه أوجدμ وσ^2 (ب) توزيع المعاينة النظري للوسط الحسابي لحجم العينة 2 مع العلم أنّ الاختيار تمّ دون ارجاع، (ج) اوجد$\mu_{\bar{X}}$ و $\sigma_{\bar{X}}$.

الحل:

(أ)أوجد التوزيع الاحتمالي للمجتمع ومنه أوجد$\bar{X}$ وσ^2

نحسب الاحتمال $P(X)$ لكل متغير عشوائي (X) نحصل على التوزيع الاحتمالي للمجتمع، كما هو موضح في الجدول الموالي

X	1	3	5	7	9
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\mu = \sum X\,P(X) = (1)\left(\frac{1}{5}\right) + (3)\left(\frac{1}{5}\right) + (5)\left(\frac{1}{5}\right) + (7)\left(\frac{1}{5}\right) + (9)\left(\frac{1}{5}\right) = 5$$

قيمة الوسط الحسابي

$$\sigma^2 = \sum(X-\mu)^2\,P(X) = (1-5)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (3-5)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (5-5)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (7-5)^2\left(\frac{1}{5}\right) + (9-5)^2\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{40}{5}\right) = 8$$

قيمة التباين

ملاحظة:

- لو حسب μ باعتماد الصيغة$\frac{\sum X}{N}$لوجدنا نفس القيمة 5. بحيث N تمثل حجم المجتمع
- لو حسب σ^2 باعتماد الصيغة$\frac{\sum(X-\mu)^2}{N}$لوجدنا نفس القيمة 8.

(ب) توزيع المعاينة النظري للوسط الحسابي لحجم العينة 2 مع العلم أنّ الاختيار تمّ دون ارجاع

بما أنّ السحب بدون ارجاع والترتيب غير مهم فالعدد الكلي للعينات الممكن سحبها هو :

$$C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

وهذه العينات هي:

1,3 ، 1,5 ، 1,7 ، 1,9 ، 3,5 ، 3,7 ، 3,9 ، 5,7 ، 5,9 ، 9,7

والمتوسطات $\bar{X}$ للعينات السابقة هي: 2، 3، 4،5، 6، 7، 8. الجدول التالي يعطي التوزيع النظري للمعاينة

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$

$\bar{X}$	2	3	4	5	6	7	8
$P(\bar{X})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(ج) اوجد $\mu_{\bar{X}}$ و $\sigma_{\bar{X}}$

من جدول توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ نحسب $\mu_{\bar{X}}$ بحيث:

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{X}\, P(\bar{X}) = 5$$

والجدول التالي يوضح كل العمليات اللازمة لحسابه

								المجموع
$\bar{X}$	2	3	4	5	6	7	8	/
$P(\bar{X})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$\bar{X}\, P(\bar{X})$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	5

لحساب $\sigma_{\bar{X}}$ نستخدم الصيغة :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

لأن:

$$n \geq 0.05\, N$$

ومنه:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{5-2}{5-1}} = \sqrt{4} \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \cong 1.73$$