تمهيد:

التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي Normal Distribution Curve هو من الأدوات كثيرة الاستخدام في التحاليل الإحصائية. فدائما ما نسمع عن المنحنى الذي يشبه الجرس وهو منحنى التوزيع الطبيعي. إنني أحاول في هذه المحاضرة توضيح مفهوم التوزيع الطبيعي دون الدخول في تعقيدات حسابية

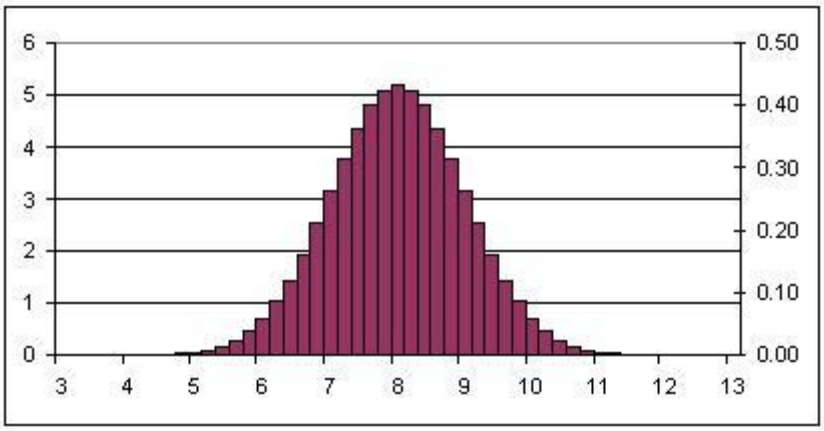
ما معنى التوزيع الاحتمالي Probability Distribution ؟

يمكن فهم التوزيع (التوزيع الاحتمالي) كشكل مشابه للمدرج التكراري Histogram؛ ولكن المدرج التكراري يصف توزيع البيانات الحقيقية بينما التوزيعات الرياضية (النظرية) مثل التوزيع الطبيعي وغيره هي توزيعات نظرية لها معادلات محددة وجداول تبين الاحتمالات المختلفة ولذلك تسمى توزيعات احتمالية. فعندما نرسم المدرج التكراري لمتغير ما فإننا نحاول أن نتعرف على التوزيع الاحتمالي الذي يُشبهه لكي نستخدم هذا التوزيع الاحتمالي في التحاليل الإحصائية.

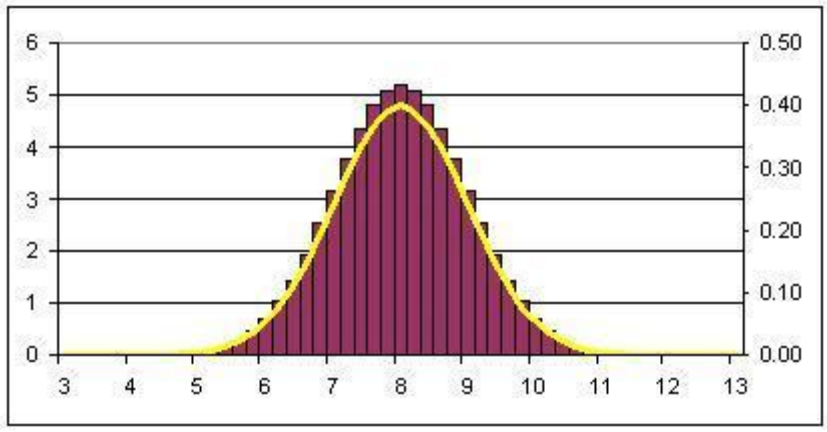
التوزيع يبين احتمالية أن يأخذ المتغير الذي ندرسه قيمة معينة أو أن يأخذ أقل أو أكثر من قيمة ما. فالتوزيع المنتظم Uniform يبين أن احتمالية أن يأخذ المتغير قيمة ما في مدى محدد متساوية بينما تجد الاحتماليات مختلفة في التوزيع الطبيعي. ففي التوزيع الطبيعي تكون الاحتمالية أعلى إذا كانت القيمة قريبة من المتوسط وتكون قليلة كلما ابتعدنا عن المتوسط. وهذه الاحتمالية يمكن تحديدها باستخدام الحاسوب أو الجداول.

والتوزيعات الاحتمالية لها أهمية في عمليات المحاكاة Simulation حيث نقوم بتحديد أقرب توزيع احتمالي للمدرج التكراري أي للتغيرات الحقيقية. وبناء عليه فإننا نستخدم هذا التوزيع في نموذج المحاكاة حيث يتم محاكاة التغير بنفس التوزيع ونفس القيم الحقيقية.

افترض أننا قمنا برسم المدرج التكراري لمجموعة بيانات وحصلنا على الشكل التالي.



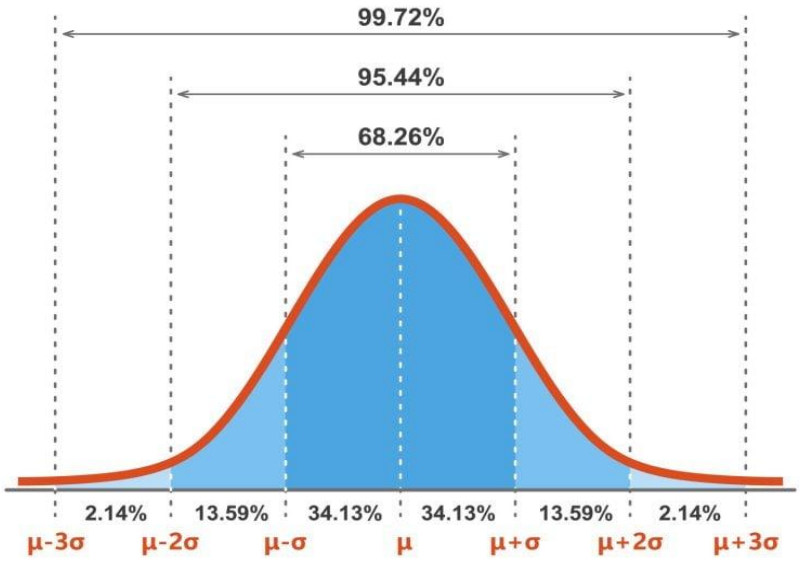
يمكننا البحث عن توزيع رياضي يشبه هذا المدرج التكراري والذي نرسمه بالخط الأصفر في الرسم التالي. في هذه الحالة فإن التوزيع المناسب هو التوزيع الطبيعي.



التوزيع الطبيعي Normal Distribtion هو أشهر التوزيعات الاحتمالية وذلك لسببين. السبب الأول هو أن الكثير من الظواهر تتبع منحنى التوزيع الطبيعي. السبب الآخر هو أن هناك نظرية تقول أن متوسط قيم عينات متعددة يأخذ شكل التوزيع الطبيعي ولو لم يكن توزيع المتغير نفسه يتبع التوزيع الطبيعي. لذلك فإن التوزيع الطبيعي هو شيء محوري في علم الإحصاء.

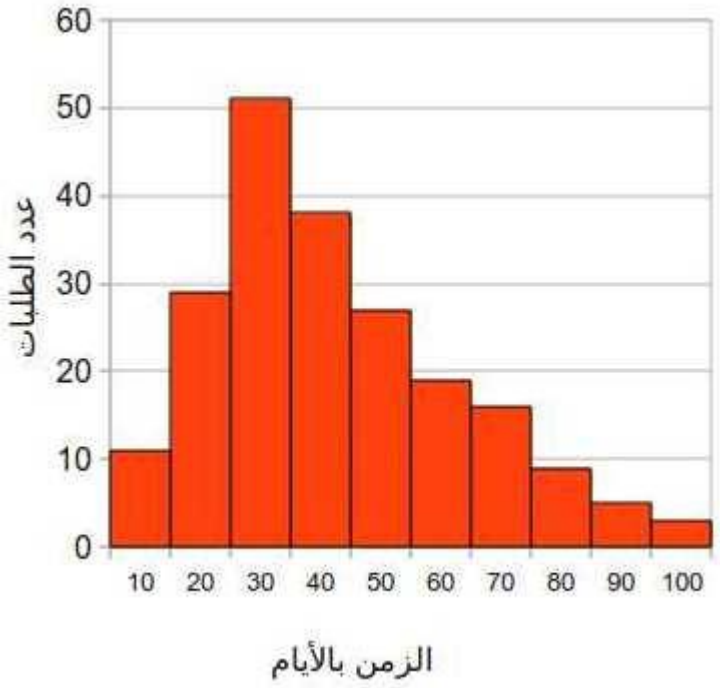
منحنى التوزيع الطبيعي يشبه الجرس ويتميز بوجود تماثل بين جانبيه الأيمن والأيسر حول المتوسط. ومن سمات منحنى التوزيع الطبيعي أن المتوسط يساوي الوسيط ويساوي المنوال. يتم تعريف منحنى التوزيع الطبيعي بقيمتين: المتوسط والانحراف المعياري. ويرمز عادة للمتوسط بـ μ وللانحراف المعياري بـ σ واختصارا $X \sim N(\mu, \sigma)$. الرسم التالي يبين شكل منحنى التوزيع الطبيعي وفي هذا المثال المتوسط $\mu = 8$. لاحظ تماثل المنحنى يعني أن 50% من القيم هي أقل من المتوسط و50% من القيم هي أكبر من المتوسط وهذا يعني أن الوسيط يساوي المتوسط.

ولمنحنى التوزيع الطبيعي سمات رئيسية منها أن 68,26% من الاحتمالات تقع في حدود المتوسط ± الانحراف المعياري. و99.72% من الاحتمالات تقع في حدود المتوسط ±3 الانحراف المعياري (انظر في الشكل الموالي). فلو عرفنا المتوسط والانحراف المعياري يمكننا حساب هذه الاحتمالات. لاحظ أن احتمال وقوع المتغير بين قيمتين تُمَثل بالمساحة تحت المنحنى بين هاتين القيمتين. ولذلك يمكننا بمجرد النظر أن نقول إن وقوع قيمة المتغير في الرسم أعلاه بين 8 و9 هي أعلى بكثير من وقوعه بين 10 و11 لأن المساحة تحت المنحنى بين 8 و9 أكبر بكثير منها بين 10 و11.



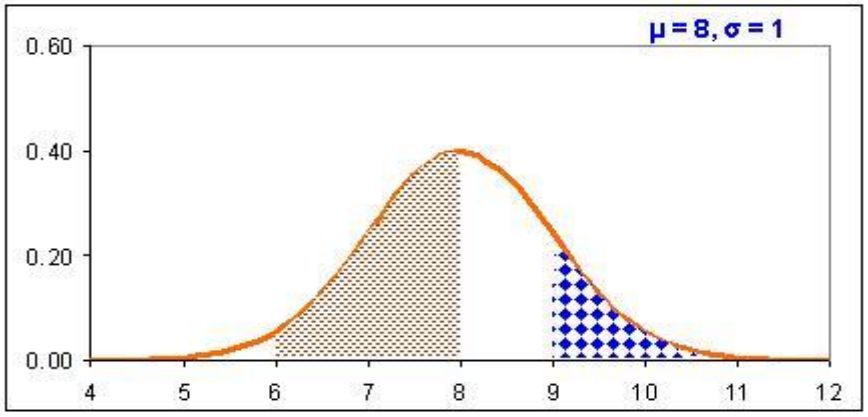
المساحة تحت المنحنى...لماذا؟

كما علمت فإن احتمالية وقوع المتغير بين قيمتين تقاس بالمساحة تحت المنحنى بين هاتين القيمتين. ولكن من أين لنا هذا المفهوم؟ دعنا نرجع إلى المدرج التكراري .Histogram انظر إلى المدرج التكراري أدناه والذي يبين زمن عملية ما بالأيام.



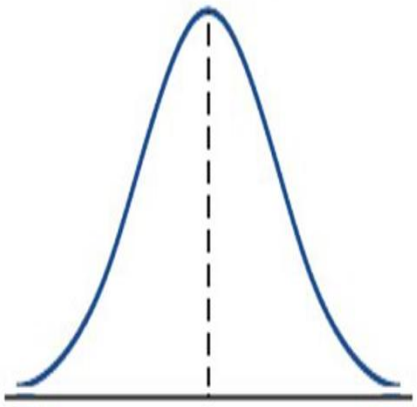
من الواضح أن الزمن متغير ولكن إن سألتك ما هي احتمالية أن يكون زمن العملية بين 20 و40 يوما؟ كيف ستفكر في الأمر؟ .إنك ستنظر إلى الأعمدة التي تبين وقوع المتغير في هذا المدى. من لواضح أنهما أطول عمودين وبالتالي لإغن احتماليتهما كبيرة ماذا لو سألتك عن المقارنة بين احتمالية أن يكون الزمن من 90 إلى 100 يوم وبين أن يكون من 30 إلى 50 يوما؟ إنك ستجيب بمنتهي الثقة بأن احتمالية أن يكون الزمن من 90 إلى 100 يوم أقل بكثير من احتمالية أن يكون من 30 إلى 50 يوما. لماذا؟ لأنك وجدت أن العمود الذي يمثل وقوع المتغير من 90 إلى مائة قصير جدا بالنسبة للعمودين اللذين يمثلان وقوع المتغير من 30 إلى 50 يوما. فالواقع أنك تجمع طول الأعمدة وتقارنها لتحدد الاحتماليات. وطول الأعمدة يتناسب تماما مع المساحة التي تمثلها هذه الأعمدة لأن المساحة هي حاصل ضرب هذه الأطوال في عرض كل عمود والذي هو ثابت يساوي عشرة في مثالنا هذا.

ولذلك فإننا عندما نستخدم توزيع احتمالي مثل التوزيع الطبيعي أو المنتظم أو الأسي أوغيرهم فإننا نحدد الاحتماليات بالنظر للمساحة تحت المنحنى. فلو نظرنا للشكل أدناه لعلمنا أن وقوع هذا المتغير بين 6 و 8 (المساحة البنية اللون) هي أكبر بكثير من وقوعه بين 9 و11 (المساحة الزرقاء اللون). فهي نفس فكرة النظر للأعمدة في المدرج التكرراي.



المفهوم الأساسي خواص التوزيع الطبيعي

- يتسم التمثيل البياني للمنحنى بأنه متصل ويشبه شكل الجرس ومتماثل بالنسبة للوسط.
- يتسم الوسط والوسيط والمنوال بالمساواة والمركزية.
- يعُد المنحنى متصلاً.
- يقترب المنحنى من المحور الأفقي x ولكنه لا يتلامس معه أبدًا.
- المساحة الإجمالية تحت المنحنى تساوي 1 أو 100%.

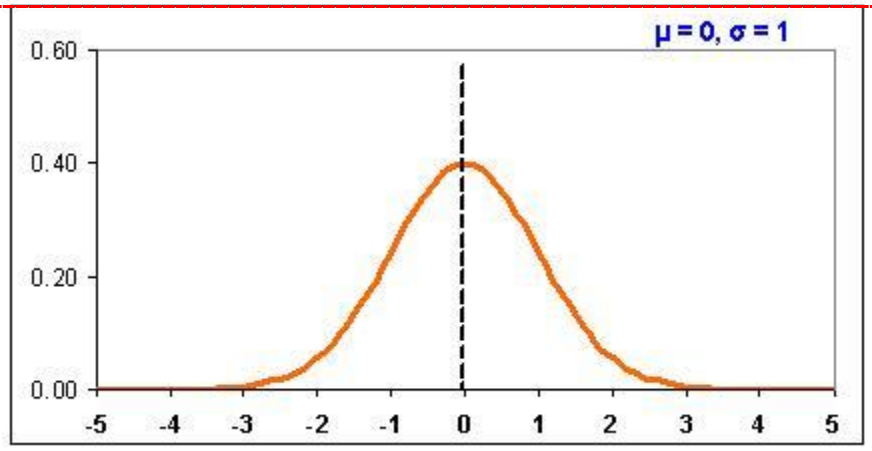


التوزيع الطبيعي القياسي

تعرفنا في العنوان السابق على منحنى التوزيع الطبيعي وخصائصه. في هذا العنوان نلقي المزيد من الضوء على التوزيع الطبيعي وذلك باستعراض التوزيع الطبيعي القياسي.

التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) Z؟

كما تعلم فإن منحنى التوزيع الطبيعي يُعرَّف بالمتوسط μ والانحراف المعياري σ. وقد يأخذ المتوسط أي قيمة ويأخذ الانحراف المعياري أي قيمة موجبة. أما منحنى التوزيع الطبيعي القياسي Standard Normal Distribution فهو توزيع طبيعي له متوسط يساوي الصفر وانحراف معياري يساوي واحد أي $Z \sim N(0,1)$.



يسمح التوزيع الطبيعي المعياري بتحويل القيم من أي توزيع طبيعي إلى مقياس موحد. ويتم ذلك عبر صيغة حسابية.

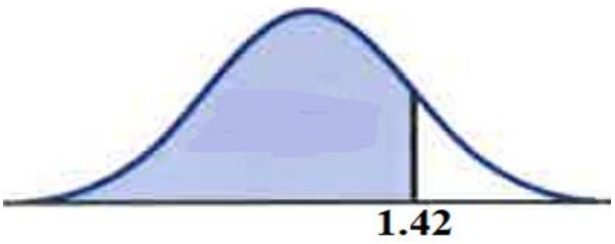
المفهوم الأساسي صيغة قيم z

قيمة z الخاصة بقيمة البيانات في مجموعة بيانات محددة من خلال $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$، حيث X هي قيم البيانات، و μ هو الوسط، و σ هو الانحراف المعياري.

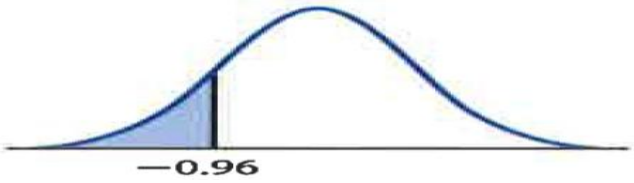
تمارين:

التمرين الأول:

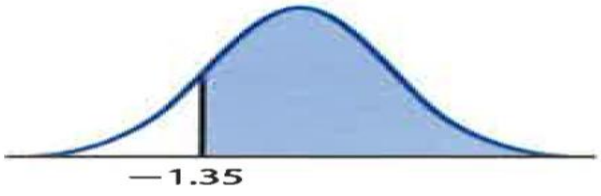
أوجد المساحة التي تتطابق مع كل منطقة مظللة.



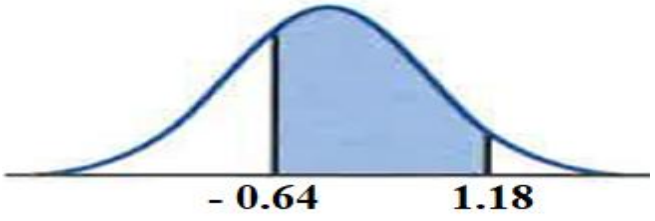
ا



ج

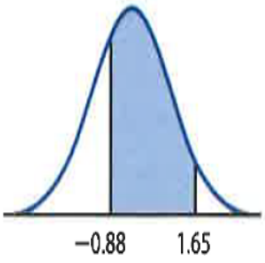


ب



د

أوجد المساحة التي تتطابق مع كل منطقة مظللة.



A) 0.7611

B) 0.9505

C) 0.1894

D) 1.14

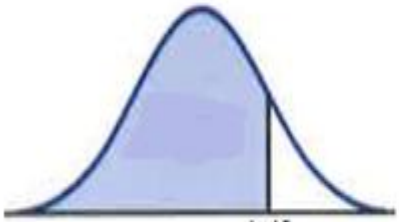
هـ

الحل:

ـ

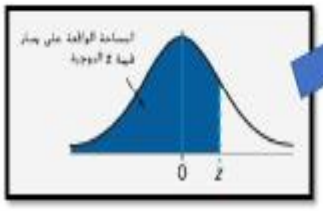
استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد المساحة على يسار z الموجبة

1) على يسار $z = 1.42$



1.42

0.9222



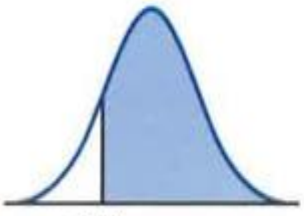
الجدول A- تابع

التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7488	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

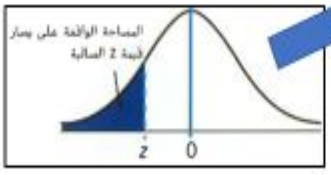
ب.

24.



−1.35

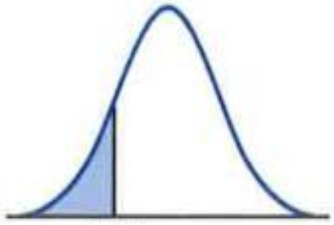
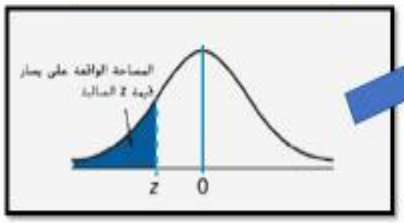
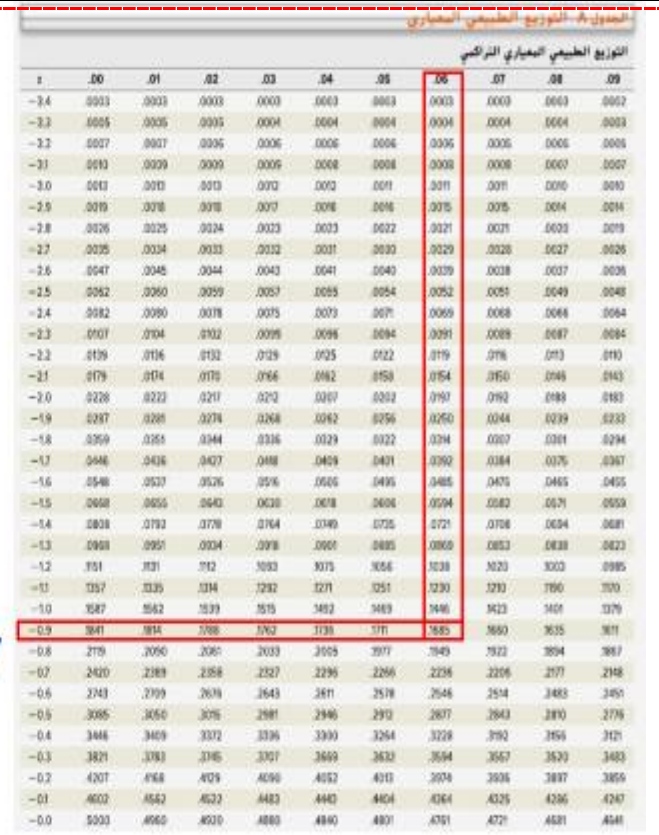
1 − 0.0885 = 0.9115



الجدول A- التوزيع الطبيعي المعياري

التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

23.  −0.96 **0.1685**  	ب
0.8810 – 0.2611=0.6199	ج
0.9505-0.1849=0.7611	د

التمرين الثاني:

توزع درجات اختبار توزيعا طبيعيا فيه الوسط الحسابي يساوي 72والانحراف المعياري يساوي 11.

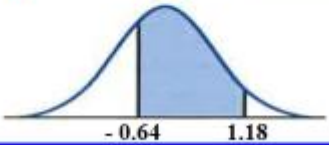
المطلوب: اوجد الاحتمال التالي ومثل المساحة المقابلة له على التوزيع الطبيعي المعياري.

$$P(65 < X < 85)$$

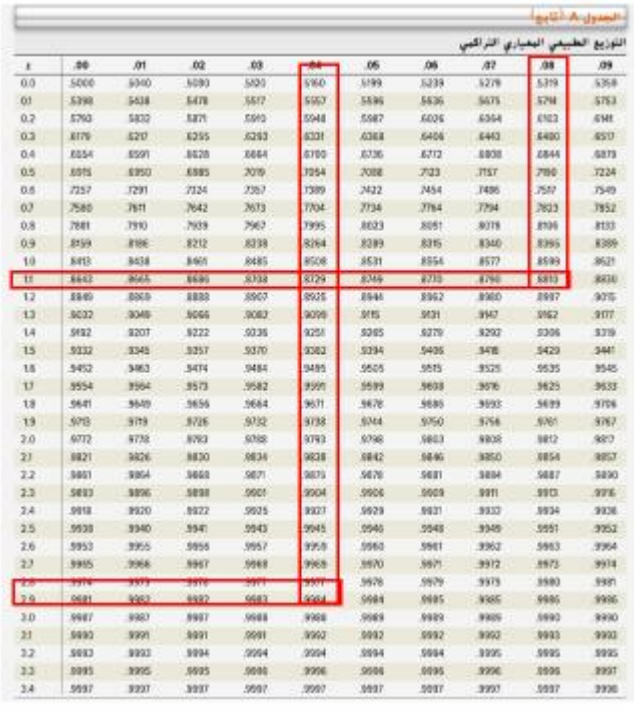
الحل:

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{65-72}{11} = -0.64$$

$$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{85-72}{11} = 1.18$$



0.8810 – 0.2611 = 0.6199



التمرين الثالث:

بلغ متوسط المكالمات التي يستقبلها مندوب خدمة العملاء كل يوم خلال شهر 105مكالمات بانحراف معياري 12. اوجد عدد الأيام التي تقل المكالمات فيها عن 110 مكالمات. نفترض ان عدد المكالمات يتبع التوزيع الطبيعي.

الحل:

لدينا:

$$x = 110$$

$$\mu = 105$$

$$\sigma = 12$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{110 - 105}{12}$$

$$z = 0.42$$

بما أن عدد الأيام التي تقل فيها عدد المكالمات عن 110 تقابل z أقل من 0.42 والمساحة التي تقابلها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري هي 0.6628

العدد المطلوب = العدد الكليx المساحة

=30x0.6628=19.9≈ 20

التمرين الرابع:

3. **كرة السلة** بلغ متوسط عدد النقاط التي أحرزها أحد فرق كرة السلة خلال موسم واحد 63 مع انحراف معياري 18. إذا كانت هناك 15 مباراة خلال الموسم، فأوجد النسبة المئوية للمباريات التي أحرز فيها الفريق أكثر من 70 نقطة. افترض أن توزيع عدد النقاط كان طبيعيًا.

$x = 70$
$\mu = 63$
$\sigma = 18$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{70 - 63}{18}$$

$$z = 0.39$$

المساحة = 1- 0.6517 = 0.3383

النسبة المئوية = 0.3383 = 33.83%

$\approx 34\%$