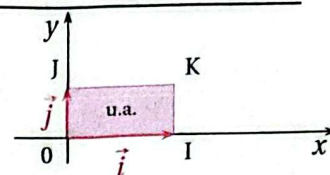


1. INTÉGRALE ET AIRE

1.1. Unité d'aire

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.

L'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $I(0; 1)$, $J(0; 1)$ et $K(1; 1)$.



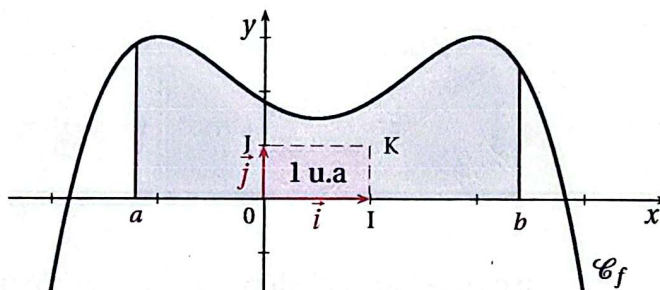
1.2. Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1 :

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Ce nombre est noté : $\int_a^b f(x)dx$



Remarque :

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$ ».
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.
- La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$, car le domaine \mathcal{D}_f est alors réduit à un segment.

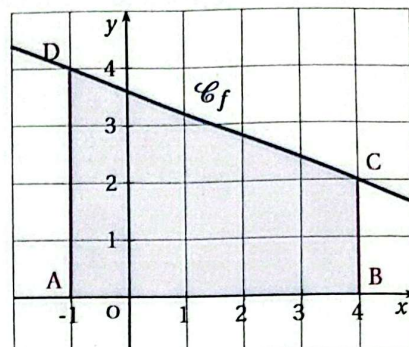
Exemple :

Calculons $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x + 3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1; 4]$

L'intégrale $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$ est égale à l'aire du trapèze ABCD.

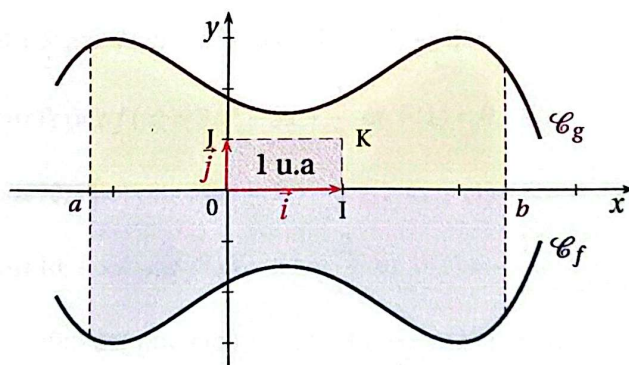
$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(4 + 2) \times 5}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$



1.3. Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a; b]$ par $g = -f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine \mathcal{D}_g compris entre la courbe \mathcal{C}_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition 2 :

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}$$

1.4. Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Théorème 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

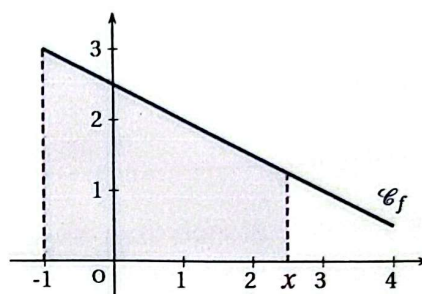
La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 4]$ par

$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Si x est un réel de l'intervalle

$[-1; 4]$, la fonction F définie par $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ est égale à l'aire du trapèze colorié. On a donc $F(x) = \frac{(3 + (-0,5x + 2,5)) \times (x + 1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}$. La fonction F est dérivable sur $[-1; 4]$ et $F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x)$.



2. PRIMITIVES

2.1. Définition

Définition 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et si :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple :

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur \mathbb{R} de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 3x^2 + 6x = f(x)$

- $G : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$

- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H : x \mapsto x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur \mathbb{R} de la fonction $f : x \mapsto 2x$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = G'(x) = H'(x) = 2x = f(x)$.

Remarque :

- Comme F est dérivable sur I , la fonction F est en particulier continue sur I .

- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f . C'est pourquoi on parle d'une primitive de la fonction f et non de la primitive de la fonction f .

Théorème 2 :

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .
- Si F est une primitive de f sur I , alors toute autre primitive de f sur I est la forme $F + c$ où c est une constante.
- Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple : La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = x^2 - 1$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x$ vérifiant $F(1) = 0$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$ et $F(1) = 1^2 - 1 = 0$.

2.2. Calculs de primitives

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et k un réel, alors kF est une primitive de kf sur I .

2.2.1 Primitives des fonctions usuelles

f est définie sur I par ...	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur \mathbb{R}
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur \mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	<i>prochain cours</i>	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	sur $] -\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $] -\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0; +\infty[$

Exemple : Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2$
 $F(x) = 3 \times \frac{1}{3} x^3 + C = x^3 + C$
2. $f(x) = x + \frac{3}{2}$
 $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + C$
3. $f(x) = (2x+1)(x-3)$
 Tout d'abord, développons $f(x) = (2x+1)(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x + 3$. Ainsi, une primitive est donnée par $F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^3 - 5 \times \frac{1}{2} x^2 + 3x + C = \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 3x + C$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
 $F(x) = -\frac{1}{x} + C$
5. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$
 $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{x} + C$
6. $f(x) = \frac{1}{x^5}$
 $F(x) = -\frac{1}{4x^4} + C$
7. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$
8. $f(x) = \frac{6x^2 - 8x + 2}{5}$
 $F(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$
9. $f(x) = -\frac{6}{x^4}$
 $F(x) = -\frac{6}{3x^3} = -\frac{2}{x^3} + C$

2.2.2 Primitive des fonctions composées usuelles

u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

conditions	fonction f	une primitive F est donnée par
n entier, $n > 0$	$f = u' u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
u ne s'annule pas sur I	$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$
u ne s'annule pas sur I n entier, $n > 1$	$f = \frac{u'}{u^n}$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
u strictement positive sur I	$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$

Exemple : Calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (2x+1)^2$
 f semble être de la forme $u' u^2$ avec $u(x) = 2x+1$. On a $u'(x) = 2$ donc
 $u'(x) u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x)$
 Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^3}{3} = \frac{1}{6} (2x+1)^3$$
2. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
 f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x+1$. On a $u'(x) = 1$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{x+1}$$

3. $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$

f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-3x$. On a $u'(x) = -3$ donc

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} = -3f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{u(x)} \right) = \frac{1}{-3} \times \left(-\frac{1}{1-3x} \right) = \frac{1}{3(1-3x)}$$

4. $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$

f semble être de la forme $u' u^3$ avec $u(x) = x^2 - x + 1$. On a $u'(x) = 2x - 1$ donc

$$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}$$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

f semble être de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x+2$. On a $u'(x) = 1$. Donc,

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = f(x)$$

Donc, une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x+2}$$

3. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

3.1. Définition

Définition 4 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I . Soit F une primitive de f sur I . L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Remarque :

- La différence $F(b) - F(a)$ se note $\left[F(x) \right]_a^b$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

- Le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple :

- $\int_1^3 3t^2 + 2t - 1 dt = \left[t^3 + t^2 - t \right]_1^3 = (3^3 + 3^2 - 3) - (1^3 + 1^2 - 1) = 33 - 1 = 32$
- $\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Proposition 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I . Soit F une primitive de f sur I . On a alors :

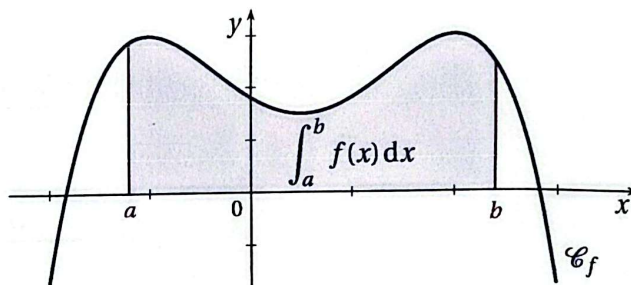
$$\int_a^a f(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

3.2. Premières propriétés

Proposition 2 :

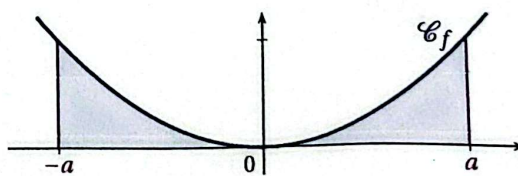
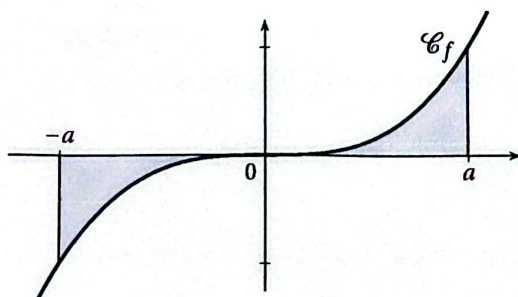
Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de f . Alors :

$\int_a^b f(t) dt$ est l'aire de la surface comprise entre \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Proposition 3 :

- Si f est continue et paire sur $[-a; a]$, alors : $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- Si f est continue et impaire sur $[-a; a]$ alors : $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.



Exemple :

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{-1}^1 t^3 \sqrt{t^2 + 1} dt = 0 \\ & \bullet \int_{-1}^1 t^2 + |t| dt = 2 \int_0^1 t^2 + |t| dt = 2 \int_0^1 t^2 + t dt = 2 \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Proposition 4 : Relation de Chasles

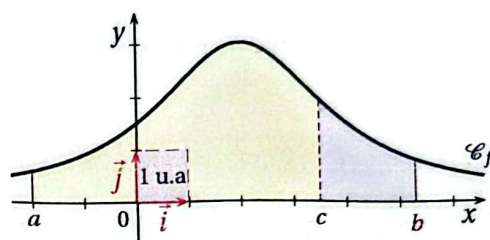
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Interprétation graphique

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

L'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$.



Proposition 5 : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. Alors, pour tout réel α , on a :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

Exemple : Soit a un réel et f la fonction définie sur $[-1; 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Vérifier que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{1-a}{2} dx + \int_0^1 \frac{1+a}{2} dx \\ &= \frac{1-a}{2} \int_{-1}^0 1 dx + \frac{1+a}{2} \int_0^1 1 dx \\ &= \frac{1-a}{2} [x]_{-1}^0 + \frac{1+a}{2} [x]_0^1 \\ &= \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1 \end{aligned}$$