

CHAPITRE 4 : FLEXION

4.1 Définitions et exemples

4.1.1 Flexion pure

*On parle de **flexion pure** lorsqu'une poutre est soumise **uniquement à un moment fléchissant constant**, sans effort tranchant et sans effort normal.*

La figure ci-contre donne un exemple d'une barre soumise à flexion pure. Les deux couples C agissent dans un plan de symétrie longitudinal de la poutre : dès lors, en effectuant une coupure suivant une section droite quelconque, on constate que tous les efforts internes y sont nuls sauf le moment fléchissant autour de l'axe Oz (perpendiculaire au plan dans lequel se trouve la poutre) qui est constant et égal à C .

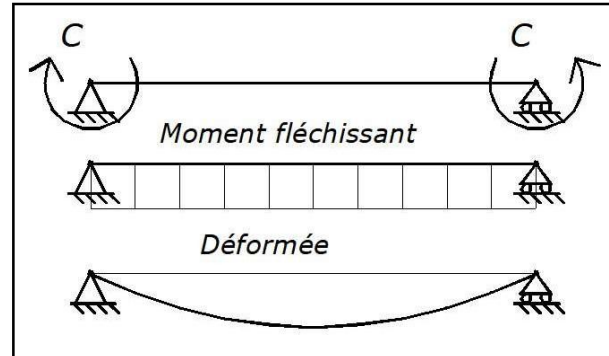


fig. 4.1. - Flexion pure.

Par des considérations de symétrie, on peut montrer que toute section droite de la barre le reste après déformation.

Le moment fléchissant étant, par définition, constant, la barre se déformera partout de façon identique. Elle adoptera donc une courbure constante en prenant la forme d'un arc de cercle.

4.1.2 Glissement et cisaillement dans les pièces fléchies

La rupture par glissement et cisaillement se produit dans un corps quand, par suite des charges qui agissent sur lui, une partie de ce corps glisse par rapport à l'autre partie, les efforts intérieurs que la matière subit ayant dépassé la résistance à la rupture.

Ce genre d'effort intérieur se produit également dans les pièces fléchies.

Deux exemples simples permettent de s'en rendre compte.

Supposons qu'une poutre soit formée d'une série de blochets B juxtaposés et serrés l'un contre l'autre par un étau, comme le montre la première figure ci-dessous.

Plaçons cette poutre sur deux appuis C et D et chargeons-là d'une série de forces F .

La poutre étant ainsi sectionnée suivant les sections S , il est évident que les blochets B vont glisser les uns par rapport aux autres et, par exemple, vont se présenter à un moment donné dans les positions données par la seconde figure ci-dessous.

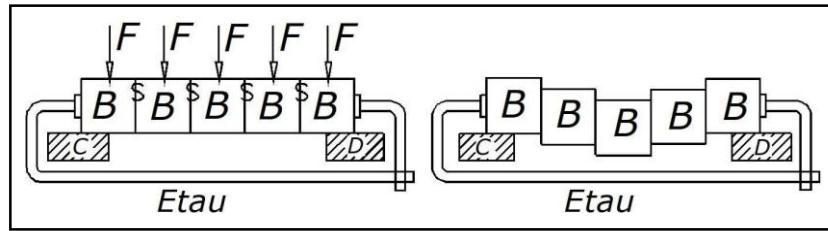


fig. 4.2. - Glissement transversal.

Ces déplacements par glissement étaient à prévoir puisque la matière manque de continuité suivant les plans S. Dans ces plans la résistance de la matière est nulle, seul le serrage des bloquets par frottement les uns contre les autres s'opposent à leur déplacement par glissement.

Dans la mesure du possible les poutres fléchies sont d'une seule pièce, cependant elles présentent la même tendance au **glissement transversal** et si la résistance de la matière est insuffisante, les mêmes déplacements verticaux auront tendance à se produire également.

Dans la grande majorité des cas ces **efforts tranchants** sont négligeables par rapport aux autres efforts sollicitant la poutre, il faudra cependant en tenir compte au moment de la conception des poutres soumises à flexion (raidisseurs aux appuis).

Supposons en second lieu que la poutre fléchie soit constituée d'une série de planches empilées et posées sur les appuis C et D. Une charge F fait fléchir l'ensemble.

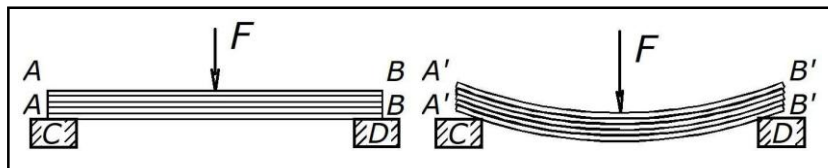


fig. 4.3. - Glissement longitudinal.

L'expérience très simple à réaliser, montre que chacune des planches fléchit et s'incurve pour son propre compte, ce qui les oblige à glisser les unes par rapport aux autres dans le sens longitudinal.

Les extrémités des planches qui, avant l'application de la charge F , se trouvaient en coïncidence dans un même plan AA et BB, ne le sont plus après déformation.

La seule résistance opposée à ce **glissement longitudinal** provient du frottement des planches les unes sur les autres. En réalité, on ne tient compte de ce glissement que dans les calculs des soudures ou des rivets des poutres composées.

4.1.3 Flexion simple

Il apparaît donc dans les sections transversales d'une barre, *en même temps que les moments de flexion, des efforts tranchants*, d'où :

La **flexion simple** est un état de charge tel que dans toute section droite d'une pièce il n'existe qu'un **moment fléchissant M_f** et un **effort tranchant V** associé.

La flexion simple entraîne sur toute la section perpendiculaire à la fibre moyenne de la pièce des contraintes normales et tangentiellles. Ces dernières provoquent un gauchissement des sections droites.

Toutefois, la déformation du plan des sections transversales n'influe pas d'une façon notable sur la grandeur des contraintes normales.

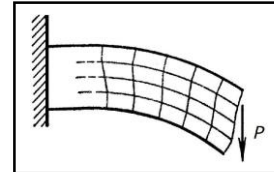


fig. 4.4.
Gauchissement.

L'erreur que l'on ne commet en ne tenant pas compte de cette déformation dans le calcul des contraintes normales est faible (voir nulle si l'effort tranchant est constant).

Une **barre** travaillant principalement à la **flexion** est appelée **poutre**.

Un exemple concret de poutre isostatique soumise à flexion simple est donné à la figure ci-dessous. Les charges sont toujours appliquées dans un plan longitudinal de symétrie. En effectuant une coupure au droit de la charge P , on constate que comme efforts internes, il existe un moment fléchissant M_f et un effort tranchant V .

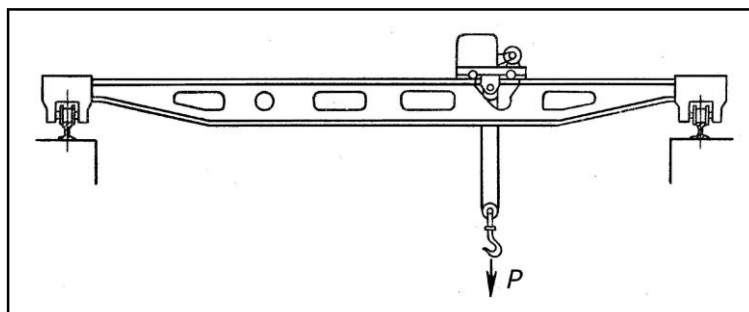


fig. 4.5. - Poutre de pont roulant : flexion simple.

4.2 Diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants

4.2.1 Conventions de signes

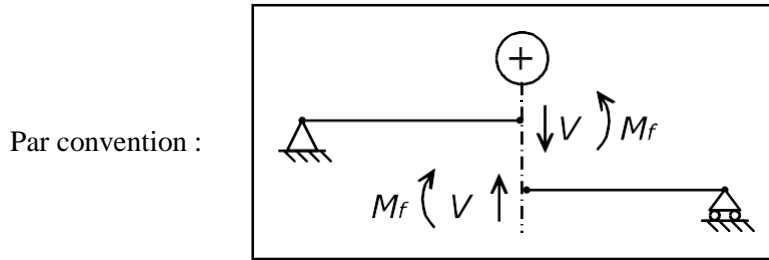


fig. 7.6. - Flexion simple : convention de signes.

Le moment fléchissant est positif :	<i>s'il tend à mettre en traction les fibres inférieures longitudinales de la poutre.</i>
L' effort tranchant associé est positif :	<i>s'il tend à faire tourner le petit élément dans le sens horlogique.</i>
La charge $p_{(x)}$ est positive :	<i>si elle agit vers le bas.</i>

Pour retrouver facilement le *signe des moments fléchissants* M_f , on peut se servir de la règle suivante :

Si une <i>force</i> F ou p agit vers le bas ,	le M_f correspondant est :	(-)
Si une <i>force</i> F ou p agit vers le haut ,	le M_f correspondant est :	(+)

Pour le *signe des efforts tranchants* V :

Si une <i>force</i> F ou p agit vers le bas ,	le V correspondant est :	(-)
Si une <i>force</i> F ou p agit vers le haut ,	le V correspondant est :	(+)

Remarque :

Ne fonctionne que si on établit le diagramme des efforts tranchants *de la gauche vers la droite*.

4.2.2 Signification physique du moment de flexion

Le moment de flexion M_f qui agit sur une section droite de la poutre est en réalité le moment d'un couple de forces agissant sur cette section. Le plan de ce couple est aussi celui des forces sollicitant la poutre. C'est le plan de flexion.

L'effet de M_f , supposé > 0 sur la figure ci-contre, est celui qui serait produit par un couple de forces f_1 et f_2 (avec $f_1 = f_2$), dont f_1 "pousserait" sur la moitié supérieure de la section ss et f_2 "tirerait" sur la moitié inférieure. Une des conséquences en est une sorte de rotation apparente d'un angle ω de la section, mouvement qui est suggéré par le sens de la flèche. Les fibres longitudinales de la poutre, devant rester perpendiculaires à ss , suivent le mouvement en s'arquant dans le sens positif convenu.

La compréhension de ce phénomène physique est capitale pour la suite de l'étude de la flexion.

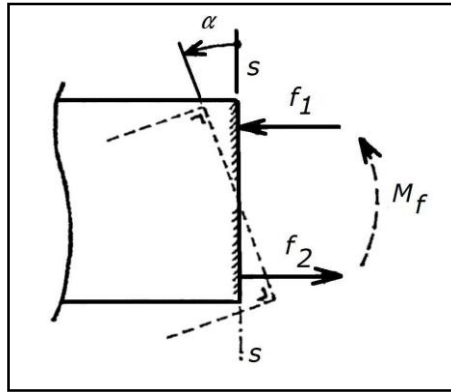


fig. 7.7. - Signification du moment fléchissant.

4.2.3 Diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants

Ces diagrammes joueront un rôle très important dans la recherche des sections les plus sollicitées ainsi que dans la détermination des flèches. Ils remplissent donc une fonction primordiale dans le dimensionnement des poutres.

Pour construire les diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants, on effectue un certain nombre de coupures (entre les charges extérieures, entre une charge et une extrémité non appuyée, dans les zones où agissent les charges réparties).

Pour *chaque coupure* on détermine l'expression de M_f et de V **en équilibrant le tronçon compris entre une extrémité de la poutre et la coupure**. Les diagrammes sont tracés à partir des équations obtenues pour M_f et V . La convention de signe adoptée pour le dessin des diagrammes est celle explicitée ci-dessus. Ce choix implique que le diagramme des moments soit orienté du côté de la fibre tendue.

Effort tranchant dans une section :

Somme des **forces** (réactions comprises) situées à droite (ou à gauche) de la section considérée.

Moment fléchissant dans une section :

Somme des **moments**, de toutes les forces (réactions comprises) situées à droite (ou à gauche) de la section considérée.

On peut aussi montrer que les efforts tranchants sont la dérivée de l'expression des moments fléchissants. Autrement dit :

$$V = \frac{dM_f}{dx} \quad \text{ou} \quad M_f = \int V dx$$

Ce qui a pour conséquence que le moment fléchissant maximum $M_{f \max}$ se situe à l'endroit où l'effort tranchant est nul ($V = 0$). Ce qui est une propriété très intéressante comme on le verra un peu plus loin.

4.2.4 Résumé des relations entre le M_f , le V et le type de charge

A) Relations entre le moment fléchissant et l'effort tranchant

1. L'effort tranchant V représente la tangente de l'angle formé entre la tangente au diagramme du moment M au niveau d'une section et l'axe longitudinal de la poutre.
De même, la valeur absolue de la charge répartie q représente la tangente de l'angle formé entre la tangente au diagramme de V et l'axe longitudinal de la poutre.
2. Le moment fléchissant M présente **une valeur extrême** (minimum ou maximum) précisément là où l'effort tranchant V est **nul**.
3. Lorsque l'effort tranchant V **passé par zéro de manière discontinue**, le diagramme de M perd son allure monotone : c'est une zone où la pente du diagramme change brutalement.
4. Là où V présente **un saut** sans toutefois passer par zéro, le diagramme de M montre **un point anguleux**, traduisant un changement brusque de pente (mais pas un extremum).
5. La variation du moment fléchissant M sur un tronçon donné est égale à l'**aire algébrique** du diagramme d'effort tranchant V sur ce même tronçon.
6. La **concavité du diagramme du moment M** est orientée dans le sens **opposé** à la charge répartie q .
 - Si q est positif, le diagramme est concave vers le bas.
 - Si q est négatif, il est concave vers le haut.
7. Le diagramme de l'effort tranchant V doit **se refermer** lorsqu'on part de l'extrémité gauche de la poutre : cela exprime la **nullité de la résultante des forces** internes et permet d'identifier correctement les forces concentrées.
8. Pour un système **symétrique** (géométrie et chargement), le diagramme du moment M est **symétrique**, tandis que le diagramme de l'effort tranchant T est **antisymétrique**.

B) Relations entre le type de charges et l'allure des diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants

- Sur une zone de poutre *sans charge* (**fig. 4.8. (a)**) :

V : constant	ou	V : nul (= 0)
M_f : évolue linéairement		M_f : constant
- Sur une zone de poutre soumise à une charge uniformément répartie constante (**fig. 4.8. (b)**) :

V : évolue linéairement		
M_f : évolue paraboliquement		
- Au droit d'une force concentrée (action ou réaction) (**fig. 4.8. (c)**) :

V : subit un ressaut ou une chute		
M_f : montre un point d'inflexion (cassure)		

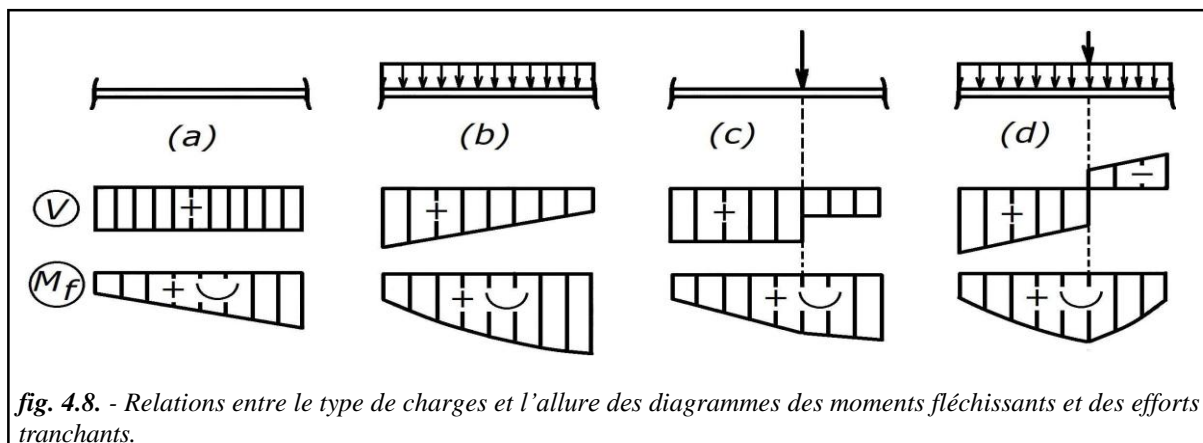


fig. 4.8. - Relations entre le type de charges et l'allure des diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants.

C) Relation entre le moment fléchissant et la déformée d'une poutre

Les conventions dans le signe des moments fléchissants que nous avons adopté est tel que le diagramme des moments fléchissants est positionné du côté de la fibre tendue (en traction). En résumé :

- ▶ Si le diagramme des moments fléchissant est *positif*, la déformée présente une *concavité vers le haut*.
- ▶ Si le diagramme des moments fléchissant est *négatif*, la déformée présente une *concavité vers le bas*.
- ▶ Dans la section où le moment fléchissant est nul ($M_f = 0$), il y a changement de sens de courbure de la déformée; celle-ci présente en cette section un *point d'inflexion*.

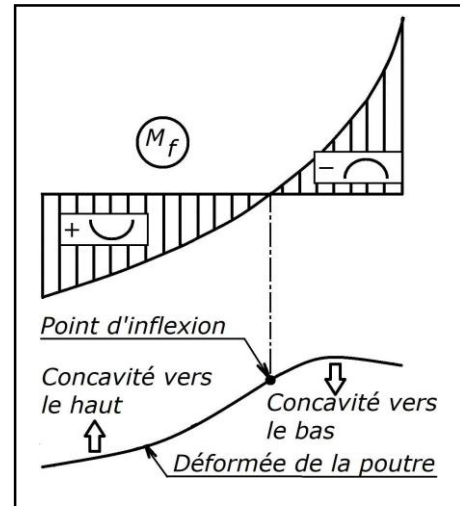


fig. 4.9 - Relation entre le moment fléchissant et la déformée d'une poutre.

D) Relation entre le type de charge et la position du moment fléchissant maximum d'une poutre

La position du moment fléchissant maximum dépend directement du **type de charge** appliquée sur la poutre (**voire A**) :

- ▶ Charge(s) ponctuelle(s) *uniquement* : Au droit d'une des charges ponctuelles.
- ▶ Charge répartie : Position : $d = R_A / q$

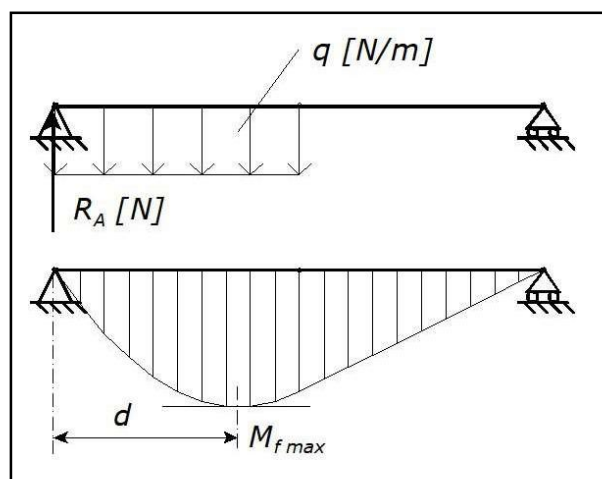


fig. 4.10. - Position du M_{fmax} pour une charge répartie.

Remarque importante :

Ne fonctionne que si la charge répartie est telle qu'elle agit de manière continue entre l'appui et l'endroit du moment fléchissant maximum et sans charge ponctuelle en superposition.

E) *Trucs et astuces*

- Dans le cas d'un dimensionnement de poutre à la contrainte, il s'agira de déterminer d'abord le diagramme des efforts tranchants. Le moment fléchissant maximum se situe à l'endroit où l'effort tranchant s'annule. Le calcul s'effectuera pour cette position uniquement.
- En remplaçant une charge répartie par la même charge localisée en son centre de gravité, on obtient, au diagramme des moments fléchissants M_f , les tangentes à la parabole, aux extrémités de la zone de répartition. Il suffit, pour obtenir le diagramme exact des M_f de tracer la parabole à partir de ces 2 tangentes.

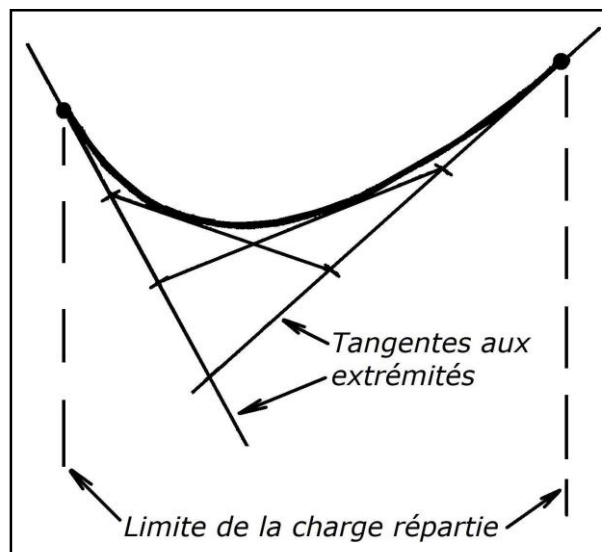


fig. 4.11. - "Parabolisation" du diagramme des moments fléchissants lors d'une charge répartie.

4.2.5 Les diagrammes des V et M_f

La construction des diagrammes des éléments de réduction constitue une étape essentielle dans toute étude de RDM. Un diagramme est un graphe qui indique la valeur (intensité et nature) de la sollicitation considérée dans toutes les sections du système étudié. Ils sont tracés à partir des relations (1.4).

Les diagrammes des éléments de réduction permettent de localiser les sections les plus sollicitées (sièges des contraintes les plus élevées) et servent au dimensionnement des différents éléments des structures.

Dans la construction des diagrammes, les valeurs positives et négatives sont portées de part et d'autre d'un axe-origine. Par ailleurs, pour le diagramme du moment fléchissant, on a pour habitude de porter les ordonnées toujours du côté des fibres tendues.

Pour éviter tout risque de mauvaise interprétation des diagrammes, il est vivement recommandé d'ajouter dans chaque aire des diagrammes les précisions suivantes :

Diagramme de N : la lettre C ou T , selon qu'il s'agisse d'un effort de compression ou d'un effort de traction.

Diagramme de V : le sens de la rotation provoquée par l'effort (voir diagramme de V).

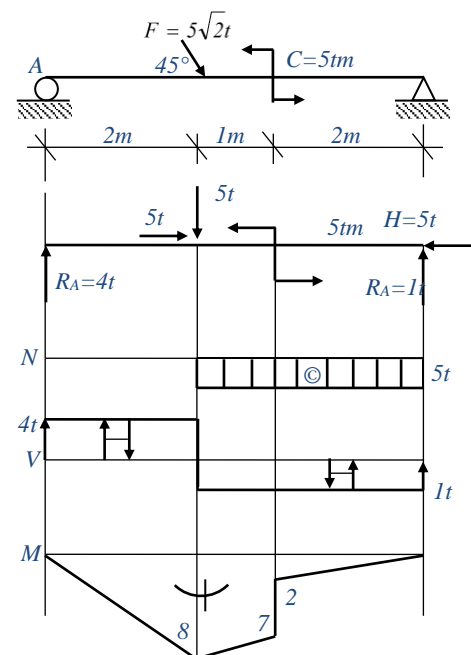


fig 4.12

Diagramme de M : on peut ajouter un arc pour préciser le sens de la courbure provoquée par le moment (voir diagramme de M).

A partir des constatations précédentes, nous allons établir la marche à suivre pour tracer les diagrammes des V et des M_f relatifs aux poutres constituant des systèmes isostatiques. Il faut :

- Calculer les réactions d'appuis.
- Tracer le diagramme des efforts tranchants V .
- Calculer les valeurs de V aux sections où un changement d'intensité des charges ou des réactions externes se produit.
- Localiser les endroits où $V = 0$ (ces points sont importants, puisque c'est là que les moments fléchissant M_f atteint une valeur maximale ou minimale).
- Tracer le diagramme des moments fléchissant M_f .
- Calculer les valeurs des moments fléchissant M_f aux points où $V = 0$.

Les exemples suivants illustrent cette marche à suivre.

4.2.6 Exemples

A) Poutre sur deux appuis : charge ponctuelle

1) Recherche des réactions d'appuis.

$$\begin{aligned} \sum (\vec{f}_i) &= \vec{0} & : & & R_A - Q + R_B &= 0 \\ \sum (\vec{M}_B) &= \vec{0} & : & & -R_A l + Q l_b &= 0 \Rightarrow R_A = \frac{Q l_b}{l} \\ \Rightarrow R_B &= \frac{Q l_a}{l} \end{aligned}$$

2) Recherche des efforts tranchants. (On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite)

$$\begin{aligned} \text{Entre A et C} & : & V_{A \rightarrow C} &= R_A = \frac{Q l_b}{l} \\ \text{Entre C et B} & : & V_{C \rightarrow B} &= R_A - Q = -\frac{Q l_a}{l} \end{aligned}$$

3) Recherche des moments fléchissants. (On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite)

$$\begin{aligned} \text{Coupe en A} & : & M_{fA} &= 0 \\ \text{Entre A et C} & : & M_{fA \rightarrow C} &= R_A x \quad (x \text{ est la distance à partir du point A}) \\ \text{Coupe en C} & : & x = l_a \Rightarrow M_{fC} &= +R_A l_a = \frac{Q l_a l_b}{l} = M_{f \max} \\ \text{Entre C et B} & : & M_{fC \rightarrow B} &= R_A x - Q(x - l_a) \\ \text{Coupe en B} & : & x = l \Rightarrow M_{fB} &= +R_A l - Q l_b = 0 \end{aligned}$$

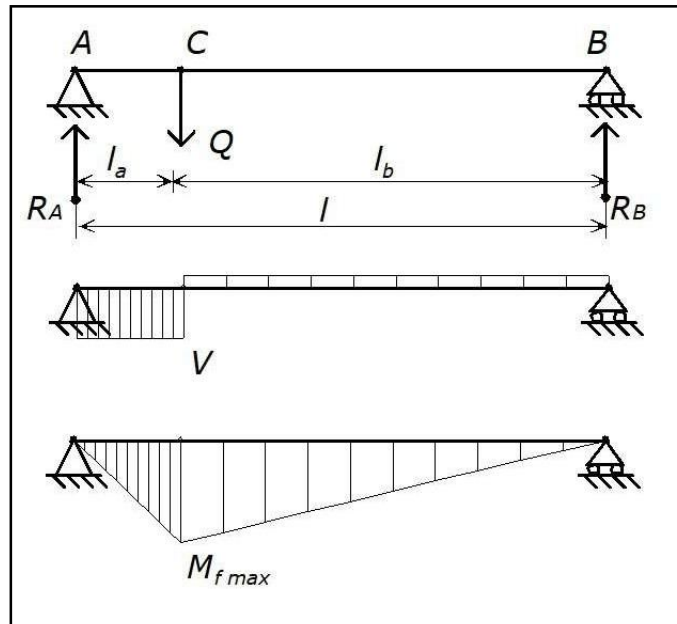


fig. 4.12. - Poutre sur 2 appuis avec charge ponctuelle.

Recherche du *moment fléchissant maximum* au moyen du diagramme des efforts tranchants. Il suffit de se souvenir que : “Le moment fléchissant maximum se situe à l’endroit où l’effort tranchant s’annule”.

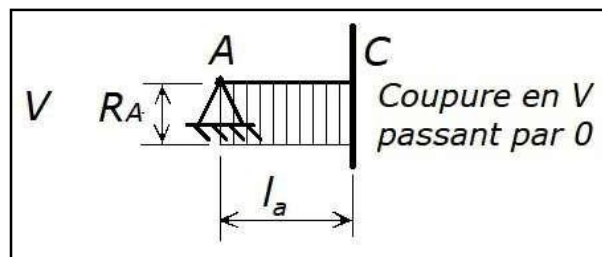


fig. 7.13. - Recherche du moment maximum au moyen de la surface du diagramme des efforts tranchants.

Et que : “Le moment fléchissant en un point P d’une poutre est égal à la surface du diagramme des efforts tranchants d’une extrémité de cette poutre à ce point P.”

Dans notre cas, nous avons directement :

$$M_{f \max} = A_{\text{diag } V} = R_A \times l_a = \left(\frac{Q l_b}{l} \right) l_a$$

$$\Rightarrow M_{f \max} = Q \frac{l_a l_b}{l}$$

B) Poutre sur deux appuis soumise à une charge uniformément répartie sur la partie droite

Remarque importante :

Lorsqu’il existe une **charge répartie**, on la remplace par une **charge ponctuelle** au centre de gravité de la charge répartie.

1) Recherche des réactions d'appuis.

$$\begin{aligned}
 \text{On pose} \quad & : \quad F = q l_p \quad \left[N = \frac{N}{m} m \right] \\
 \sum (\vec{f}_i) = \vec{0} \quad & : \quad R_A - F + R_B = 0 \\
 \sum (\vec{M}_B) = \vec{0} \quad & : \quad -R_A l + F l_b = 0 \Rightarrow R_A = \frac{F l_b}{l} = \frac{(q l_p) l_b}{l} \\
 \Rightarrow R_B = \frac{F l_a}{l} = \frac{(q l_p) l_a}{l}
 \end{aligned}$$

2) Recherche des efforts tranchants. (*On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite*)

$$\begin{aligned}
 \text{Entre A et C} \quad & : \quad V_{A \rightarrow C} = R_A = \frac{F l_b}{l} \\
 \text{Entre C et B} \quad & : \quad V_{C \rightarrow B} = R_A - q \left(x - (l - l_p) \right) \quad (x \text{ est la distance à partir du point A})
 \end{aligned}$$

3) Recherche des moments fléchissants. (*On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite*)

$$\begin{aligned}
 \text{Coupure en A} \quad & : \quad M_{fA} = 0 \\
 \text{Entre A et C} \quad & : \quad M_{fA \rightarrow C} = R_A x \\
 \text{Coupure en C} \quad & : \quad x = l - l_p \Rightarrow M_{fC} = + R_A (l - l_p) = \frac{F l_b}{l} (l - l_p) \\
 \text{Entre C et B} \quad & : \quad \begin{cases} M_{fC \rightarrow B} = R_A x - (x - l_C) q \frac{x - l_C}{2} \\ \quad \quad \quad = R_A x - (x - l_C)^2 \frac{q}{2} \end{cases} \\
 \text{Coupure en B} \quad & : \quad M_{fB} = + R_A l - F l_b = 0
 \end{aligned}$$

Pour la recherche du moment fléchissant maximum, il faut connaître la distance d (position où $V = 0$). Soit avec la relation des triangles semblables :

$$\frac{l_p}{R_A + R_B} = \frac{d}{R_A} \Rightarrow d = l_p \frac{R_A}{R_A + R_B} = l_p \frac{l_b}{l_a + l_b}$$

Et on remplace x par d dans l'expression du moment fléchissant entre C et B.

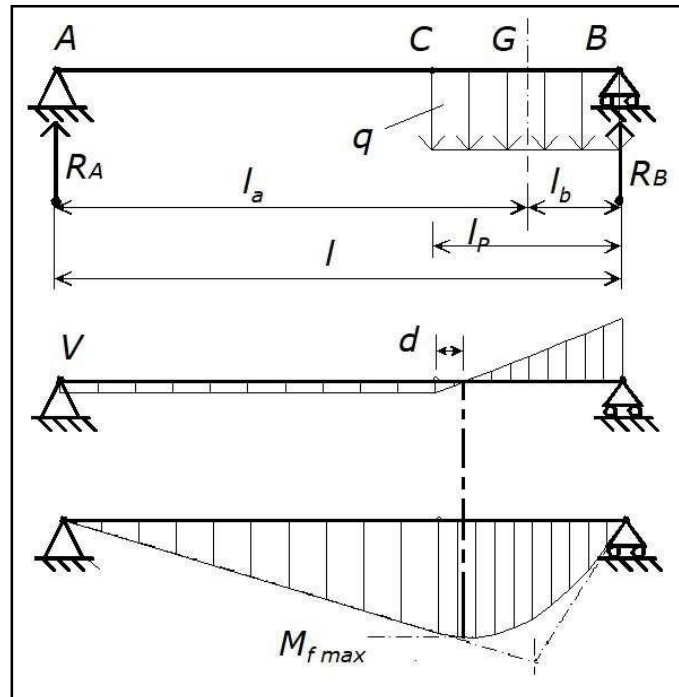


fig. 4.14. - Poutre sur 2 appuis avec charge répartie partielle.

Recherche du moment fléchissant maximum au moyen du diagramme des efforts tranchants :

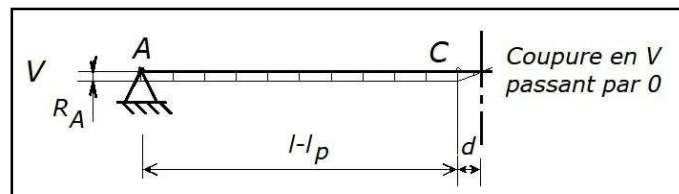


fig. 4.15. - Recherche du moment maximum au moyen de la surface du diagramme des efforts tranchants.

Nous avons donc ici :

$$M_{f \max} = A_{\text{diag } V} = R_A (l - l_p) + \frac{R_A d}{2} = \left(\frac{q l_p l_b}{l} \right) (l - l_p) + \left(\frac{q l_p l_b}{l} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{l_p l_b}{l_a + l_b} \right)$$

$$\Rightarrow M_{f \max} = q l_p \left(l_b - \frac{l_p}{l} + \frac{l_p l_b}{2 l (l_a + l_b)} \right)$$

C) Poutre soumise à une charge ponctuelle et répartie**Remarque importante :**

Si dans la zone où agit une **charge répartie** existe en outre des **forces ponctuelles** (actives ou réactives), il faut diviser la zone de charge répartie en tronçons limités par les lignes d'actions des charges ponctuelles.

1) Recherche des réactions d'appuis.

On pose : $F = q l$

$$\sum (\vec{f}_i) = \vec{0} \quad : \quad R_A - F - Q + R_B = 0$$

$$\sum (\vec{M}_B) = \vec{0} \quad : \quad + R_A l - F \frac{l}{2} - Q l_b = 0 \Rightarrow R_A = \frac{F}{2} + Q \frac{l_b}{l}$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{F}{2} + Q \frac{l_a}{l}$$

2) Recherche des efforts tranchants. (*On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite*)

Entre A et C : $V_{A \rightarrow C} = R_A - q x$ (x est la distance à partir du point A)

Entre C et B : $V_{C \rightarrow B} = R_A - Q - q x$

3) Recherche des moments fléchissants. (*On coupe en un point et on équilibre de gauche à droite*)

Coupure en A : $M_{fA} = 0$

Entre A et C : $M_{fA \rightarrow C} = R_A x - (q x) \frac{x}{2} = R_A x - \frac{q x^2}{2}$

Coupure en C : $x = l_a \Rightarrow M_{fC} = R_A l_a - \frac{q l_a^2}{2} = M_{f \max}$

Entre C et B : $M_{fC \rightarrow B} = R_A x - (q x) \frac{x}{2} - Q(x - (l - l_a))$

Coupure en B : $x = l \Rightarrow M_{fB} = R_A l - (q l) \frac{l}{2} - Q l_b = 0$

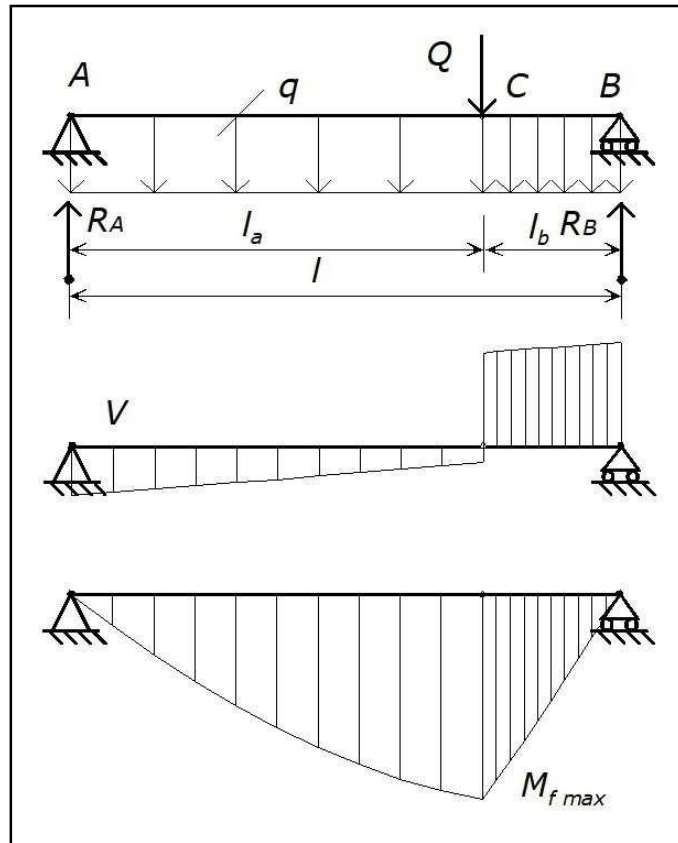


fig. 4.16. - Poutre sur 2 appuis avec charges ponctuelles et répartie.

Recherche du *moment fléchissant maximum* au moyen du diagramme des efforts tranchants :

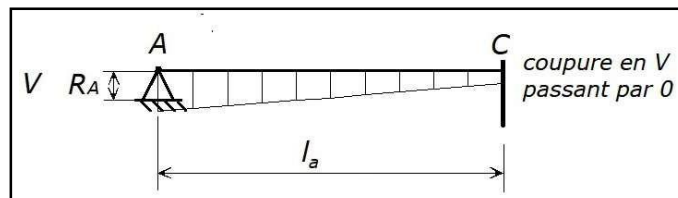


fig. 4.17. - Recherche du moment maximum au moyen de la surface du diagramme des efforts tranchants.

Nous avons donc ici :

$$M_{f \max} = A_{\text{diag } V} = \frac{R_A + (R_A - q l_a) l_a}{2}$$

$$\Rightarrow M_{f \max} = \frac{2 R_A l_a - q l_a^2}{2} \quad \text{avec} \quad R_A = q l + Q \frac{l_b}{l}$$

4.3 Distribution des contraintes normales dans une section droite

4.3.1 Généralités

Si on considère une poutre sur appuis simples, possédant un plan de symétrie longitudinal, dans lequel s'exerce des charges verticales quelconques, celle-ci va se déformer comme indiqué à la figure ci-dessous.

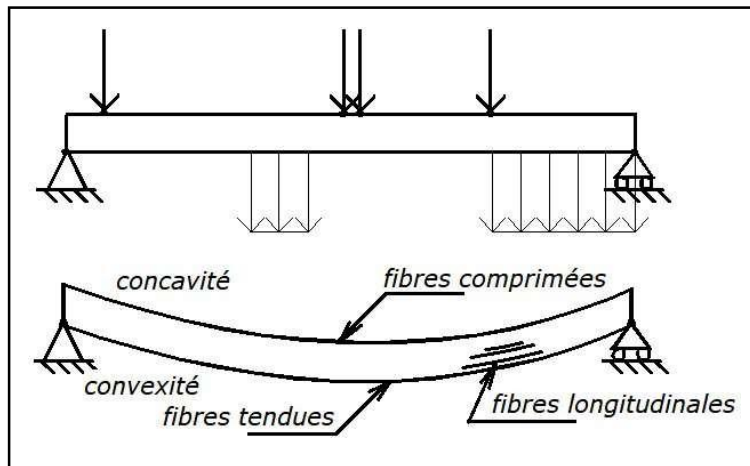


fig. 4.18. - Déformation de flexion.

Vu la courbure de la barre, les **fibres longitudinales inférieures** vont **s'allonger** et les **fibres longitudinales supérieures se raccourcir**. Dès lors on peut montrer, par la loi de Hooke (*contrainte proportionnelle au déplacement*), que lors de la flexion d'une poutre, les contraintes dans une section transversale varie selon une loi linéaire (figure ci-contre). Ce sont donc bien des **contraintes normales** (c'est-à-dire perpendiculaires à la section).

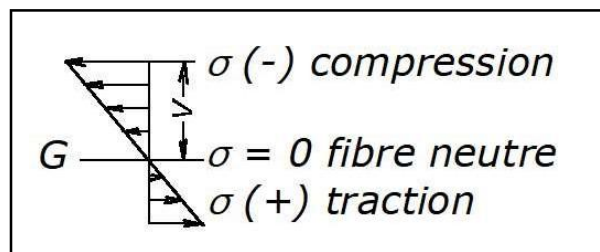


fig. 4.19. - Répartition des contraintes due à la flexion - Fibre neutre.

Si les fibres inférieures s'allongent et les fibres supérieures se raccourcissent, il doit donc logiquement exister des fibres qui vont conserver leur longueur. D'où la définition :

Définition :

Le lieu géométrique des points d'une section vérifiant la condition $\sigma = 0$ est appelé : **ligne (ou fibre) neutre** de la section.

Et dans le cas de la flexion pure et de la flexion simple, on peut montrer, par ailleurs, que **la fibre neutre** se confond **toujours** avec **le centre de gravité de la section** (sauf dans le cas particulier des pièces à fortes courbures).

4.3.2 Relation fondamentale

Explicitons maintenant le lien existant entre la contrainte σ et le moment fléchissant M_f dans une section droite. L. Navier ⁽¹⁾ à démontré que toute fibre longitudinale située à une distance y de l'axe neutre est le siège d'une contrainte donnée par la formule suivante :

$$\sigma = \frac{M_f}{I/y} = \frac{M_f y}{I} \quad (\text{éq. 4.1}) \quad [N/mm^2]$$

<u>Notations :</u>	M_f	Moment fléchissant	Nmm
	I	Moment d'inertie de la section	mm^4
	y	Distance à partir de la fibre neutre	mm

On remarque que les contraintes maximales en flexion apparaissent aux points les plus éloignés de la fibre neutre et donc :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{f \max}}{I/v} = \frac{M_{f \max}}{W_x} \quad (\text{éq. 4.2.}) \quad [N/mm^2]$$

<u>Notations :</u>	v	la distance entre la fibre neutre et le point, de la section, le plus éloigné	mm
		$v = y_{\max}$	
	I/v	module de résistance à la flexion , aussi noté W_x	mm^3

a) Pour une section symétrique:

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{My_{\max}}{I_z} \right| \leq \min([\sigma_-], [\sigma_+])$$

b) Pour une section non symétrique

$$\text{Si } [\sigma_-] = [\sigma_+] = [\sigma] \Rightarrow \max(|\sigma_{\max}^-|, |\sigma_{\max}^+|) \leq [\sigma]$$

$$\text{Si } [\sigma_-] \neq [\sigma_+] \quad \begin{cases} |\sigma_{\max}^-| \leq [\sigma_-] \\ |\sigma_{\max}^+| \leq [\sigma_+] \end{cases}$$

Remarques :

➤ La flexion simple entraîne sur toute section perpendiculaire à la fibre moyenne de la pièce des contraintes normales et tangentielles. Ces dernières provoquent un gauchissement des sections droites (voir § 4.1.3.).

Toutefois, la déformation du plan des sections transversales n'influe pas d'une façon notable sur la grandeur des contraintes normales.

L'erreur que l'on ne commet en ne tenant pas compte de cette déformation dans le calcul des contraintes normales est faible (voire nulle si l'effort tranchant est constant).

- Sous l'action des contraintes de traction s'exerçant dans la partie inférieure de la barre, un rétrécissement latéral de la section droite, dû au coefficient de Poisson, se produit. Pour la raison contraire, la partie supérieure de la barre est soumise à un gonflement latéral. En pratique, on ne tiendra pas compte de cette modification de la forme des sections transversales de la barre.

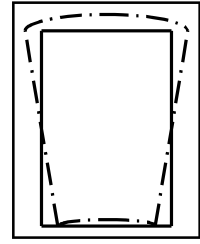


fig. 4.20. - Déformation d'une section sous l'action d'un moment fléchissant.

4.3.3 Axe fort, axe faible d'une section

On sait qu'une section droite d'une poutre possède deux axes perpendiculaires se coupant en G : l'axe y par rapport auquel on détermine un moment d'inertie I_y de la section, et l'axe z par rapport auquel on détermine un I_z (Ces notations d'axe y et z sont celles normalisées suivant l'EUROCODE).

On appelle "axe fort" l'axe par rapport auquel le moment d'inertie I est le plus grand, l'autre étant qualifié de "faible". Pour les profilés I et U normalisés, tels que ceux repris dans les catalogues, l'axe y est évidemment l'axe fort et l'on en tirera les meilleures performances au point de vue flexion (contraintes σ et flèche f faibles) en plaçant l'axe y perpendiculaire au plan des forces, c'est-à-dire horizontalement dans le cas de poutres.

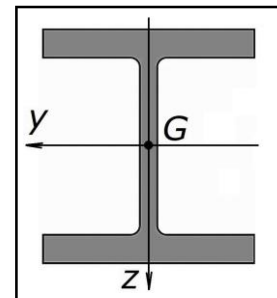


fig. 4.21. -

Le module de flexion I/v et le rayon de giration $i_g = \sqrt{I/A}$, dépendant directement du moment d'inertie I , présentent la même différenciation. Ainsi par exemple dans la série des IPE, $(I/v)_y$ est 5 à 10 fois plus grand que $(I/v)_z$, ce rapport étant de 3 à 5 pour les rayon de giration i_g . En revanche, dans la série des HEB, ces rapports sont moins élevés.

De ces dernières constatations, on peut tirer les conclusions suivantes :

- ▶ il se confirme que les profilés IPE sont conçus davantage pour reprendre la flexion simple, et que les profilés HE le sont pour reprendre la compression (avec ou sans flambement) et la flexion composée;
- ▶ dans le cas de la compression avec flambement, et quel que soit le type de profilé, le plan préférentiel de flambement, qui constituera le plan de flexion et de déformation, sera celui dans lequel la flexion aura le plus tendance à se déclencher spontanément; ce plan est donc celui qui est perpendiculaire à l'axe faible.

4.4 Contraintes tangentielles

4.4.1 Glissement longitudinal

Le *glissement longitudinal* ou *effort rasant* est l'effort agissant parallèlement à l'axe d'une pièce fléchie et ayant tendance à faire glisser les fibres longitudinales l'une sur l'autre (voir **fig. 4.3.**).

Conséquence, les contraintes tangentielles rasantes effectuent un véritable cisaillement de la matière dans tout plan horizontal d'une poutre fléchie sur lequel elles agissent. En voici quelques illustrations pratiques, avec leurs solutions.

- Pour constituer une poutre composite en bois, il faut solidariser la membrure supérieure et la membrure inférieure à l'âme. Cette solidarisation s'effectue soit par collage. Ce joint de colle va être cisailé et devra donc résister au cisaillement longitudinal, soit prévoir une file de boulons dont le fût des vis va être également cisailé, d'où un calcul de ces boulons en conséquence.

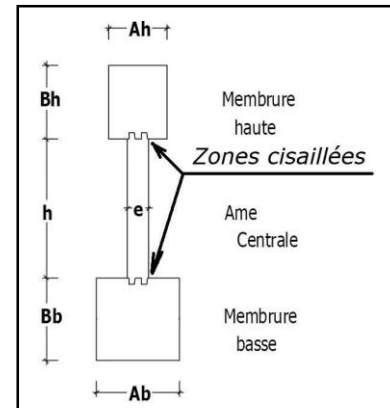


fig. 4.22. - Poutre composée en bois.

- Quand, pour résoudre un problème spécial de flexion, on a besoin d'un profilé qui ne figure pas parmi les profilés normalisés, on en réalise un "sur mesure" en assemblant par soudage des éléments de tôle forte. Ce sont les "profilés reconstitués soudés" ou PRS. Les cordons de soudure longitudinaux sont cisailés et leur profondeur a doit être correctement calculée.

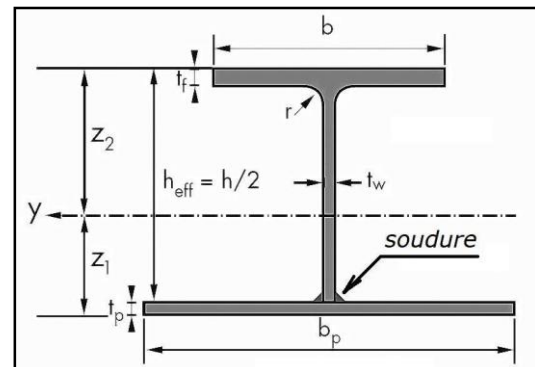


fig. 4.23. - Poutre "PRS" en acier.

- Les poutres mixtes acier-béton, ou les planchers composites, constituent des structures qui sont spécialement calculées de manière à ce que l'acier et le béton travaillent en même temps à la reprise des efforts de flexion; pour qu'il en soit ainsi, la dalle de béton est solidement liaisonnée au profilé d'acier au moyen de goudjons connecteurs ou de dispositifs semblables soudés sur la semelle supérieure du profilé. Les fûts de ces goudjons sont cisailés et leur densité augmente au fur et à mesure que l'on s'approche des appuis.

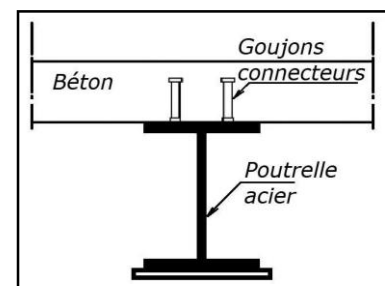


fig. 4.24. - Poutre mixte acier-béton.

Quant au calcul de ces contraintes longitudinales, nous aurons en une section quelconque (Formule de Jouravski ⁽²⁾) :

$$\tau = \frac{S_{fn} V}{I_{fn} e} \quad (\text{éq. 4.3.})$$

<u>Notations</u> :	S_{fn}	Moment statique de la surface au-dessus de la fibre envisagée par rapport à la fibre neutre	mm^3
	V	Effort tranchant agissant dans la section	N/mm^2
	I_{fn}	Moment d'inertie de toute la section envisagée par rapport à la fibre neutre	mm^4
	e	Épaisseur de la bande envisagée	mm

En considérant la formule **éq.4.3.** on constate que V et I_{fn} sont constant pour une section donnée, τ varie donc avec S_{fn}/e .

On a le maximum de contrainte tangentielle τ pour une tranche à la hauteur y qui rend maximum la valeur de S_{fn}/e .

Si l'épaisseur e est constante sur toute la hauteur de la section, ce rapport est maximum quand S_{fn} est maximum, soit pour $y = 0$, à la fibre neutre. Pour les fibres extérieures, $S_{fn} = 0$, les τ sont nuls.

S_{fn} ne se prend que d'un côté de la fibre neutre. On se rappellera que la somme des moments de toute la surface par rapport à la fibre neutre est en effet égale à zéro.

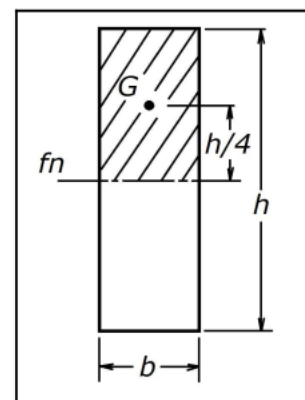
Application 7.1. Quelle est la valeur de la contrainte maximale au cisaillement longitudinal pour un rectangle ?

Solution :

La contrainte maximale se trouve sur la fibre neutre

Appliquons la formule **éq.4.3.** Avec :

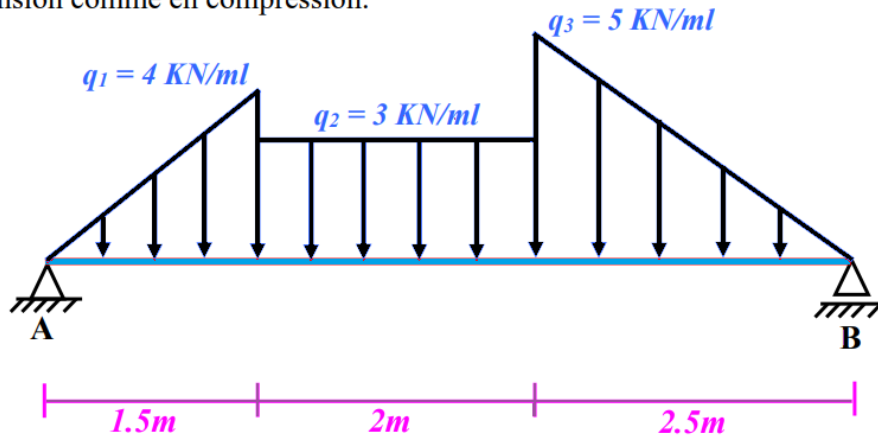
$$\begin{aligned} \blacktriangleright S_{fn} &= A d_{G-fn} = \left(b \frac{h}{2}\right) \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8} \\ \blacktriangleright I_{fn} &= \frac{b h^3}{12} \\ \blacktriangleright e &= b \\ \Rightarrow \tau_{\max} &= \frac{S_{fn} V}{I_{fn} e} = \frac{\left(b h^2 / 8\right) V}{\left(b h^3 / 12\right) b} = \frac{3}{2} \frac{V}{b h} = k_{\tau} \frac{V}{A_{cis}} \end{aligned}$$



Ce qui représente 1.5 fois la contrainte de cisaillement verticale moyenne.

*fig. 7.25. - Application 4.1.***4.5 EXERCICE DE RECAPITULATON**

Calculer les dimensions de la poutre rectangulaire illustrée, en tenant compte du fait que la hauteur doit être double de la largeur et la contrainte admissible est de $1400 \text{ [Kg/cm}^2\text{]}$ en tension comme en compression.



Référence bibliographique :

- ITTERBEEK, « Cours Résistance des matériaux », site Internet, consulté le 30 novembre 2025,
URL : <https://www.itterbeek.org/fr/index/cours-resistance-materiaux>.
- Bourahla, N. (s.d.). *Résistance des matériaux de base*. Blida : G.E.CO.TE.C.