

# **CHAPITRE 3 :**

## **Les caractéristiques géométriques d'une section**

## 1. Généralités :

La résistance d'une barre aux différentes formes de sollicitation et les déformations qui en résultent ne dépendent pas uniquement de la nature du matériau et de ses dimensions, mais également de la géométrie de sa section transversale. En effet, selon le type d'effort appliqué, certaines caractéristiques géométriques deviennent essentielles et influencent directement le comportement mécanique de la barre.

Ainsi, la résistance à la traction et à la compression est principalement liée à **l'aire de la section**, tandis que la résistance à la flexion dépend fortement du **moment d'inertie** et du **moment résistant**, deux grandeurs très sensibles à la forme de la section et à la répartition de la matière autour de l'axe neutre. De même, la résistance à la torsion est gouvernée par le **moment polaire d'inertie**, grandeur qui favorise particulièrement les sections circulaires ou creuses.

Pour analyser ces effets, nous nous intéresserons aux principales caractéristiques géométriques des sections transversales, indépendamment des propriétés physiques du matériau. Ces caractéristiques sont : **l'aire de la section**, le **moment statique**, le **moment d'inertie**, le **moment résistant** et le **rayon de giration**.

Dans la suite de ce chapitre, nous développerons en détail les notions de **moment d'inertie**, de **moment statique**, de **moment résistant** et de **rayon de giration**, et nous montrerons comment chacune d'elles intervient dans la résistance de la barre selon le type de sollicitation.

Les deux tableaux suivants présentent la relation entre les caractéristiques géométriques des sections et, d'une part, la résistance aux différents efforts (**Tab 1**) et, d'autre part, la résistance aux déformations correspondantes (**Tab 2**).

Type d'effort	Grandeur géométrique clé	Rôle de la forme
Traction / Compression	Aire (A)	Faible influence de la forme
Flexion	Moment d'inertie (I), Moment résistant (W)	Très forte influence
Cisaillement	Aire résistante	Influence moyenne
Torsion	Moment polaire (J)	Très forte influence

**Tab 01 :** Relation entre les caractéristiques géométriques et la résistance aux différents efforts.

Type d'effort / déformation	Grandeur géométrique déterminante	Rôle de la section / forme
<b>Traction</b>	Aire de la section (A)	Plus l'aire est grande, plus la barre résiste. La forme influence peu.
<b>Compression</b>	Aire de la section (A)	Même principe que pour la traction, mais attention au flambement qui dépend aussi du moment d'inertie.
<b>Flexion</b>	Moment d'inertie (I) et moment résistant (W)	La forme influence fortement la résistance : les sections en I, en T, ou les tubes sont très efficaces.
<b>Torsion</b>	Moment polaire d'inertie (J)	Les sections circulaires ou creuses sont les plus résistantes. La forme a une grande influence.
<b>Cisaillement</b>	Aire résistante au cisaillement	Dépend surtout de la surface engagée. Influence moyenne de la forme.
<b>Flambement</b> (compression instable)	Moment d'inertie (I) et rayon de giration ( $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ )	Les sections ayant un grand moment d'inertie sont plus stables. La forme est très importante.

**Tab 02 :** Relation entre les caractéristiques géométriques et la résistance aux déformations.

## 2. Caractéristiques géométriques des sections transversales :

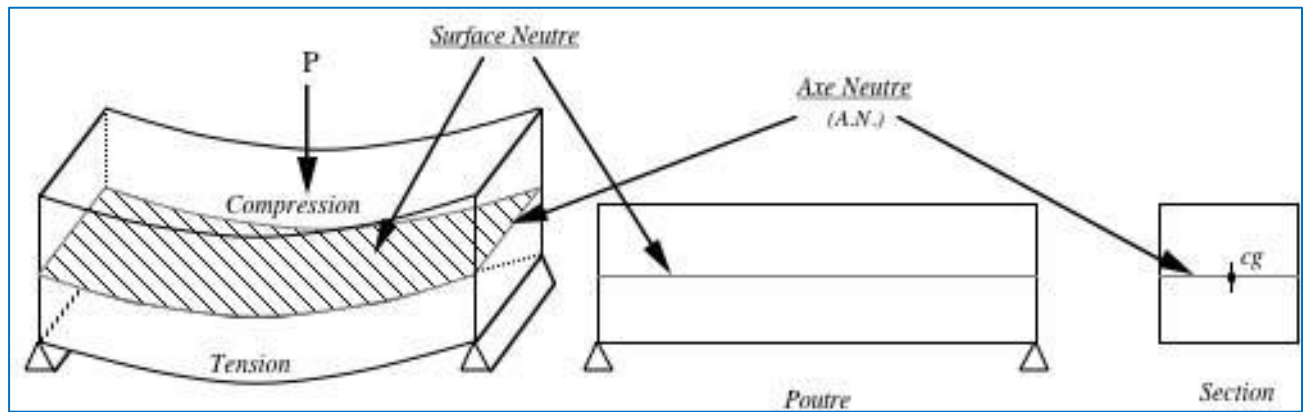
Ce sont l'ensemble des grandeurs et propriétés liées à la forme et à la répartition de la matière dans une section transversale d'une barre ou d'une poutre, indépendamment du matériau, à savoir :

- **Axe neutre d'une section ;**
- **Centre de gravité d'une section ;**
- **Moment statique d'une section ;**
- **Moment d'inertie d'une section ;**
- **Module de section (ou moment résistant) ;**
- **Rayon de giration d'une section.**

## 3. Surface neutre et axe neutre

Quand une poutre fléchit sous l'effet de forces, certaines fibres **se compriment** et d'autres **s'allongent**. Le plan intermédiaire où les fibres ne subissent ni traction ni compression est appelé **surface neutre** (voir *figure 5.1*).

Pour une section droite, la ligne correspondant à cette surface est l'**axe neutre**, qui passe par le **centre de gravité** de la section.



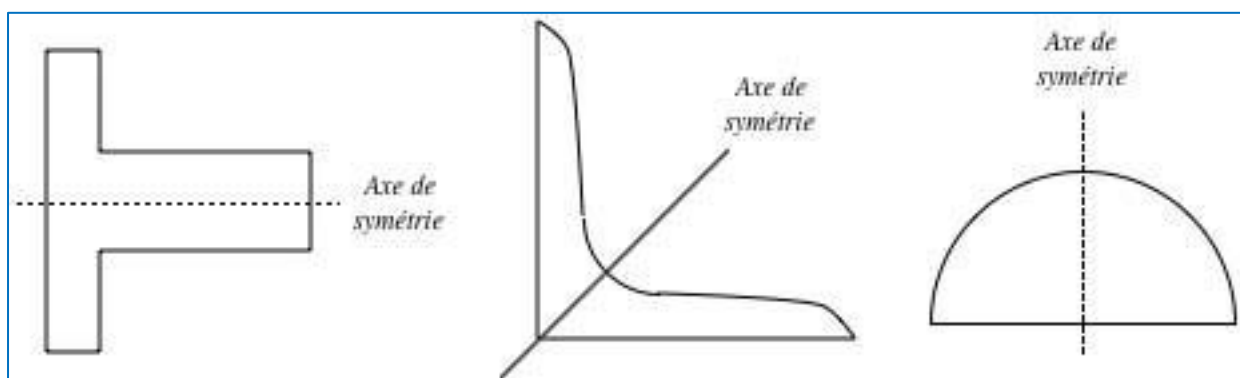
**fig 5.1 : Surface neutre et axe neutre**

#### 4. Centre de gravité (CG) :

Le **centre de gravité (CG)**, ou **centroïde**, d'une surface ou d'un corps est un point imaginaire où l'ensemble de la matière peut être considéré comme concentré, et où le poids du corps peut être supposé agir.

Pour un corps homogène (constitué d'un seul matériau), le CG dépend uniquement de la **forme de la surface ou du corps**.

- Si un corps possède un **axe de symétrie**, cet axe partage le corps en deux parties de **surface et de poids égaux**, et le CG se situe sur cet axe figure 5.2.



**Fig 5.2**

- Si un corps possède **au moins deux axes de symétrie** (ou médianes), le CG se trouve au **point d'intersection** de ces axes Fig. 5.3.

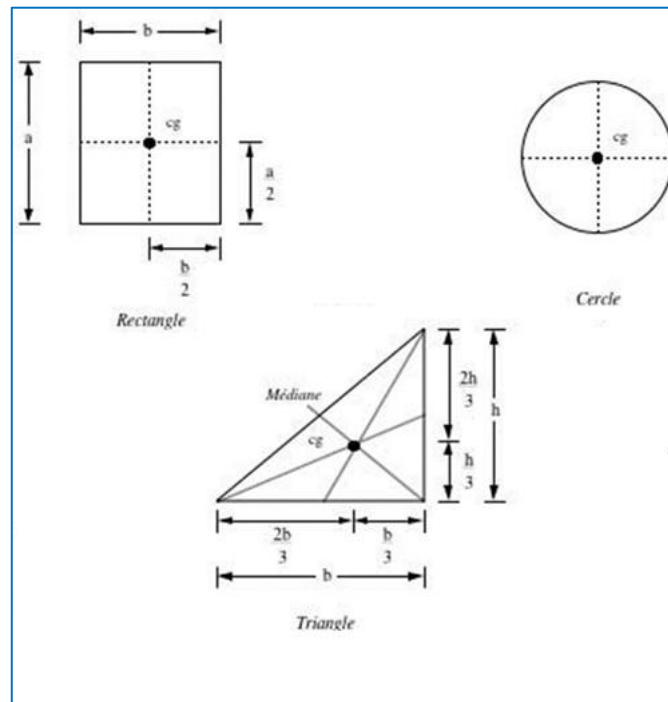


Fig 5.3

- Le CG n'est pas toujours situé dans la matière du corps Fig 5.4.

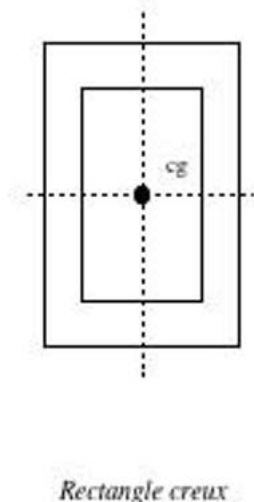


Fig 5.4

Pour une poutre en flexion, l'**axe neutre** de chaque section passe par ce centre de gravité.

#### 4.1 Méthodes de détermination du centre de gravité

Le centre de gravité (CG) d'une surface ou d'un corps peut être déterminé par plusieurs méthodes, selon la géométrie et la complexité de la section :

### 1. Méthode des axes de symétrie

- Si la surface possède un ou plusieurs axes de symétrie, le CG se situe :
  - Sur l'axe unique si la surface a un seul axe de symétrie.
  - Au point d'intersection des axes si la surface possède deux axes ou plus.

Cette méthode est simple et rapide pour les sections régulières (carré, rectangle, cercle, etc.).

### 2. Méthode de décomposition (ou méthode des parties simples)

- La surface complexe est **découpée en plusieurs parties simples** (rectangles, triangles, cercles...).
- On calcule le CG de chaque partie simple.
- Le CG de l'ensemble est obtenu par la **formule de barycentre** :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \\ y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \end{cases}$$

où ( $X_i$  et  $Y_i$ ) sont les coordonnées du CG de chaque partie et ( $A_i$ ) leur aire.

### 3. Méthode intégrale

- Pour des surfaces ou corps continus et irréguliers, le CG peut être déterminé par **intégration** :

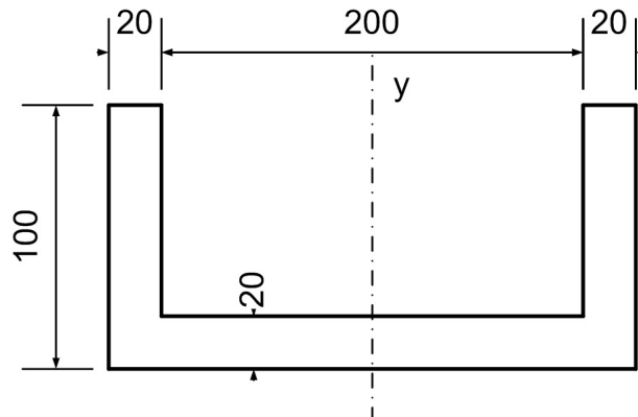
$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

Cette méthode est plus générale et permet de traiter des formes complexes.

### 4. Méthode expérimentale (physique)

- Pour des objets réels, le CG peut être trouvé **par suspension** ou **équilibre** sur un point ou un fil.
- Le point où l'objet est en équilibre est le centre de gravité.

**Application :** Calculer la position du centre de gravité de la figure ci-dessous.



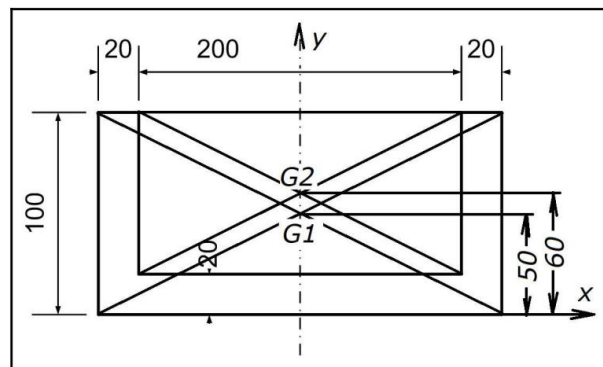
**Solution :**

**Positionnement des axes**

Le centre de gravité  $G$  se trouve sur l'axe de symétrie  $y$ .

Donc prenons comme système d'axes, l'axe  $Ox$  passant par la base du "U" et comme axe  $Oy$ , l'axe de symétrie.

**Décomposons en surfaces simples.**



- Décomposition en 2 surfaces (rectangles) simples.

Soit :

$A_1$  le "grand" rectangle (100 x 240) avec  $y_{G1} = 50 \text{ mm}$

$A_2$  le "petit" rectangle (80 x 200) avec  $y_{G2} = 60 \text{ mm}$

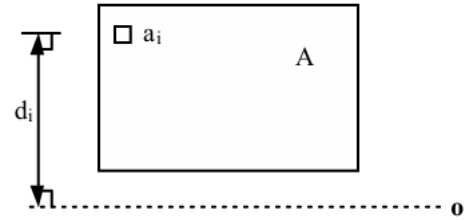
A noter que cette surface est "négative" puisqu'elle est "enlevée".

$$x_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{(240 \times 100) \times 0 - (200 \times 80) \times 0}{(240 \times 100) - (200 \times 80)} = 0 \text{ mm} \quad (\text{Évident})$$

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(240 \times 100) \times 50 - (200 \times 80) \times 60}{(240 \times 100) - (200 \times 80)} = 30 \text{ mm}$$

## 5. Moment d'inertie

Considérons une surface plane A dans laquelle un élément de surface  $a_i$  infiniment petit est indiqué. Cet élément se trouve à une distance  $d_i$  d'un axe quelconque "o". On appelle moment d'inertie  $I_i$  de l'élément de surface  $a_i$  par rapport à l'axe considéré "o", le produit de cet élément par le carré de la distance  $d_i$ :

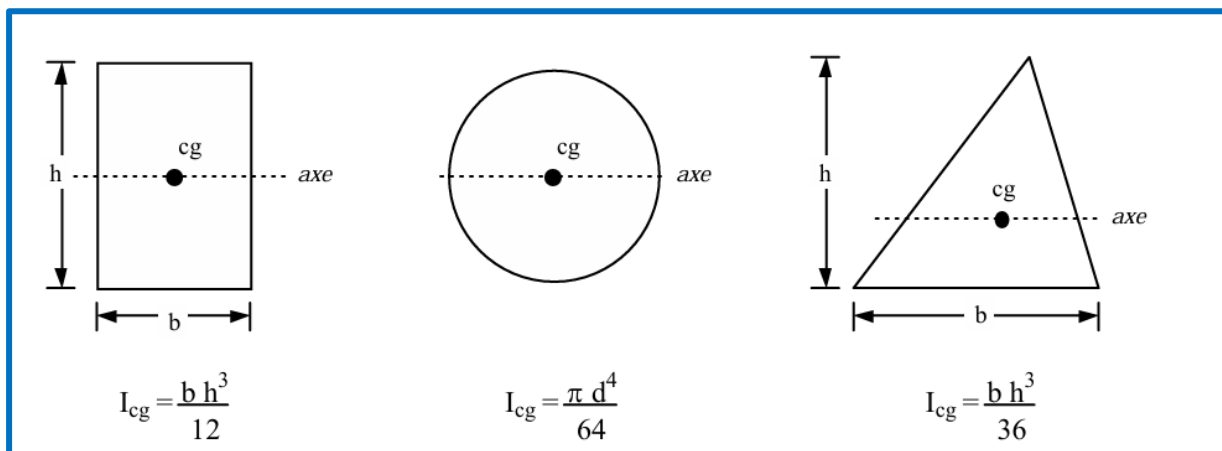


$$I_{i(o)} = a_i \times d_i^2$$

Si la surface A est subdivisée en N éléments infiniment petits  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$  dont les distances respectives à l'axe sont  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_N$  alors le moment d'inertie de cette surface par rapport au même axe "o" est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} I_o &= I_{1(o)} + I_{2(o)} + \dots + I_{N(o)} \\ I_o &= a_1 d_1^2 + a_2 d_2^2 + \dots + a_N d_N^2 \\ I_o &= \sum a_i d_i^2 \quad [m^4] \end{aligned}$$

Le moment d'inertie des sections droites est d'une grande importance dans la conception des poutres et colonnes. Les tableaux à la fin du chapitre portant sur les propriétés des sections donnent des valeurs des moments d'inertie de plusieurs profilés d'acier fréquemment utilisés dans la construction.



**Fig 5.6 :** moment d'inertie des sections couramment rencontrées.



### 5.1 Théorème des axes parallèles

Si on connaît le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe qui passe par son centre de gravité, on peut connaître son moment d'inertie par rapport à tout autre axe parallèle à ce dernier. Il suffit d'ajouter la quantité  $A.s^2$  à son  $I_{cg}$ .

*Théorème des axes parallèles:*

$$I = I_{cg} + As^2$$

où  $s$  = distance entre l'axe choisi et l'axe qui passe par le cg.

$A$  = aire de la section

$I_{cg}$  = moment d'inertie par rapport à un axe qui passe par le cg.

#### EXEMPLE

Calculer le moment d'inertie du rectangle ci-dessous par rapport à l'axe  $z$  passant par sa base.

*Solution:*

$$\begin{aligned} I_z &= I_{cg} + As^2 \\ &= \frac{bh^3}{12} + (bh) \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} \\ &= \frac{bh^3}{3} \end{aligned}$$

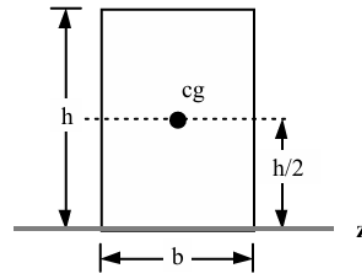


fig 5.7

Pour les **sections complexes** ou composées de plusieurs sections simples, le **moment d'inertie total** est égal à la **somme des moments d'inertie** de chacune des sections constituantes.

- Si la section comporte une **surface creuse**, le moment d'inertie correspondant à cette partie est considéré comme **négatif**.
- Dans le cas des sections composées, le **théorème des axes parallèles** (ou théorème de Steiner) est particulièrement utile pour calculer le moment d'inertie par rapport à un axe donné.

Par exemple, pour une **section en T**, si l'on souhaite déterminer le moment d'inertie de la section totale, il est nécessaire d'appliquer ce théorème. Nous illustrerons cette méthode dans le **prochain exemple**.

**EXEMPLE** . Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section en T ci-dessous.

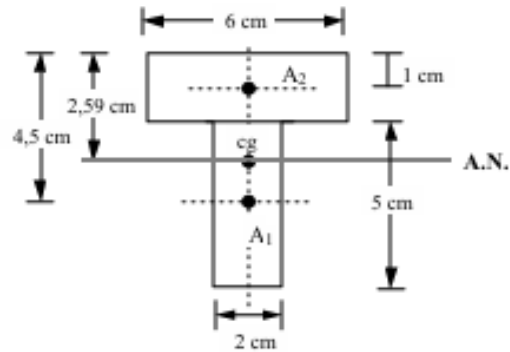
*Solution:*

Nous avons déjà trouvé le **cg** de la surface totale dans le premier exemple, on sait que l'axe neutre passe par le centre de gravité. Maintenant on veut le moment d'inertie par rapport à cet axe.

$$I_{AN} = I_{AN(\text{surface 1})} + I_{AN(\text{surface 2})}$$

$$I_{AN(\text{surface 1})} = I_{cg1} + A_1 s_1^2$$

$$I_{AN(\text{surface 2})} = I_{cg2} + A_2 s_2^2$$



**fig 5.8**

$$I_{cg1} = \frac{2 \text{ cm} (5 \text{ cm})^3}{12} = 20,833 \text{ cm}^4$$

$$\text{et } I_{cg2} = \frac{6 \text{ cm} (2 \text{ cm})^3}{12} = 4 \text{ cm}^4$$

$$I_{AN(\text{surf 1})} = 20,833 \text{ cm}^4 + (2 \text{ cm} \times 5 \text{ cm})(1,91 \text{ cm})^2 = 20,833 \text{ cm}^4 + 36,481 \text{ cm}^4 = 57,314 \text{ cm}^4$$

$$I_{AN(\text{surf 2})} = 4 \text{ cm}^4 + (2 \text{ cm} \times 6 \text{ cm})(1,59 \text{ cm})^2 = 4 \text{ cm}^4 + 30,337 \text{ cm}^4 = 34,337 \text{ cm}^4$$

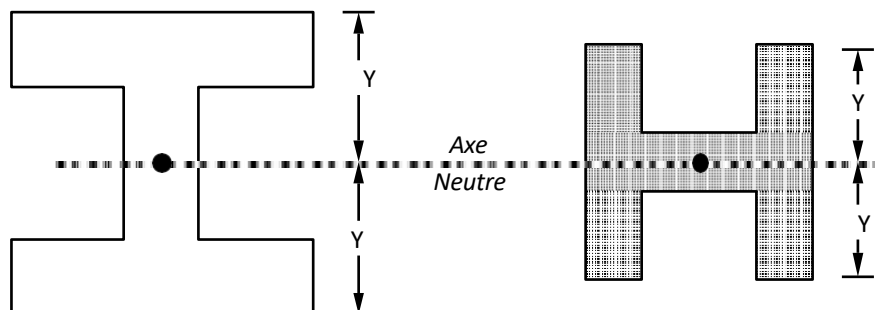
Donc  $I_{AN} = 57,314 \text{ cm}^4 + 34,337 \text{ cm}^4 = 91,651 \text{ cm}^4$

Le calcul du moment d'inertie passe toujours par celui du centre de gravité. Dans cet exemple, le centre de gravité avait déjà été trouvé, donc nous ne l'avons pas refait.

## 6. MODULE DE SECTION ET RAYON DE GIRATION

### 6.1 Module de section

Une propriété des sections fréquemment employée dans la conception des poutres est le module de section. Il s'emploie notamment dans les calculs des contraintes normales dues à la flexion. Par contre on s'en sert surtout si la surface est symétrique par rapport à l'axe horizontal, c'est-à-dire que son axe neutre est dans le plan de symétrie de la figure 5.9.



**Fig 5.9**

On appelle  $S$  le module de section et on le définit

$$S = \frac{I}{Y} \quad [m^3]$$

Où  $I$  = moment d'inertie de la surface par rapport à l'AN

$Y$  = distance perpendiculaire entre l'AN et le point le plus éloigné de la section.

À cause de la symétrie,  $S$  est le même que l'on mesure en haut ou en bas. On peut quand même calculer le module de section non symétrique en utilisant la distance la plus éloignée de l'axe neutre.

### Rayon de giration

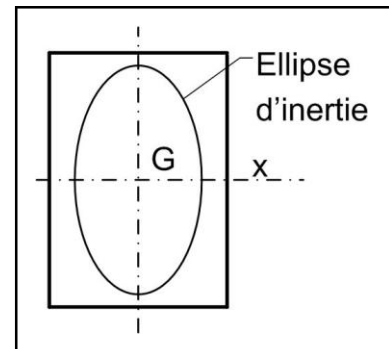
Par définition le **rayon de giration**  $i_{gr}$  (par rapport à un axe de référence  $r$ ) est :

$$i_{gr} = \sqrt{\frac{I_r}{A}}$$

(Unité le  $m$ )

Il représente le rayon d'un tube fictif mince de même inertie  $I_r$  et de rayon  $i_{gr}$  tel que la matière se trouve idéalement concentré sur ce rayon. En effet :

$$I_r = A i_{gr}^2$$



*fig. 5.10. - Ellipse d'inertie.*

Il sera surtout employé dans les calculs de résistance au flambage.

On peut aussi écrire le rayon de giration comme étant :

$$i_{gr} = \sqrt{\frac{E I_r}{E A} \frac{\text{rigidité à la flexion}}{\text{rigidité à la traction - compression}}}$$

et donc le rayon de giration représente le *rapport entre la rigidité à la flexion par rapport à la rigidité à la traction - compression*.

### Remarque :

L'indice dont est affecté le symbole du rayon de giration représente l'axe par rapport auquel il est mesuré perpendiculairement. Par exemple  $i_x$  est mesuré perpendiculairement à l'axe  $Ox$

**Référence bibliographique :**

- ITTERBEEK, « Cours Résistance des matériaux », site Internet, consulté le 30 novembre 2025,  
URL : <https://www.itterbeek.org/fr/index/cours-resistance-materiaux>.
- Bourahla, N. (s.d.). *Résistance des matériaux de base*. Blida : G.E.CO.TE.C.
- <https://appx.cchic.ca/svilleneuve/materiaux/chap8> **PROPRIÉTÉS DES SECTIONS**