Chapitre I
Généralités

1.1 L'Objet de la Résistance des Matériaux

La **Résistance des Matériaux (RDM)** est une science de l'ingénieur dont l'objectif est de fournir les méthodes nécessaires pour **calculer la performance des structures et des éléments de machines**. Cette analyse se concentre sur trois critères essentiels : la **résistance**, la **rigidité** et la **stabilité**.

- La **résistance** désigne la capacité d'une pièce à supporter une charge sans être détruite.
- La **rigidité** est la propriété d'un élément à s'opposer aux déformations (changement de forme ou de dimensions) causées par des charges extérieures.
- Enfin, la **stabilité** est la capacité de l'élément à conserver sa forme d'équilibre initiale sous contrainte, évitant ainsi un effondrement soudain (comme le flambement).

En résumé, la RDM permet aux ingénieurs de concevoir des ouvrages à la fois **sûrs**, **fonctionnels** et **durables**.

En résumé : La RDM est l'outil qui permet de trouver le **juste équilibre** entre la **sécurité maximale** (non-rupture et bonne fonctionnalité) et la **meilleure économie possible** (optimisation des matériaux).

1.2 Le Domaine d'Application de la RDM

La Résistance des Matériaux (RDM) est la discipline fondamentale qui assure la **stabilité et la sûreté** d'une immense variété de constructions. Sans ses principes, la conception de nombreux éléments du génie civil et mécanique serait impossible.

Elle s'applique à des ouvrages très divers, incluant notamment :

- Les **ouvrages de génie civil** (ponts, hangars).
- Les **infrastructures** (lignes de transport, antennes).
- Les **constructions navales et aéronautiques** (navires, avions).
- Les **mécanismes complexes** (turbines, groupes de centrales nucléaires, fusées).

1.3 Les Formes Géométriques Étudiées

Malgré cette grande diversité, la RDM simplifie la modélisation des ouvrages en les ramenant à un nombre restreint de **formes géométriques principales** :

1. **Les barres (ou poutres)**
2. **Les plaques**
3. **Les corps massifs**

a) La Poutre qui est la forme la plus couramment étudiée :

On appelle barre ou poutre un corps dont la dimension longitudinale est beaucoup plus grande que les deux autres transversales et dont le centre de gravité G décrit un axe rectiligne ou curviligne G_0 et G_1 (Fig.1.1). La section transversale (A) reste normale à cet axe. (A) est appelée également section droite.

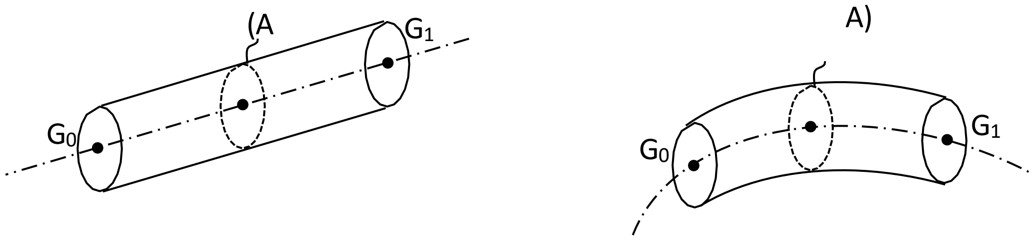


Fig.1.1

b) Les plaques, coques et membranes :

Il s'agit de corps dont deux dimensions, de même ordre de grandeur, sont beaucoup plus grandes que la troisième (Figures 1.2a et 1.2b). Ces types d'éléments ne sont pas traités ici.

c) Les poutres à parois minces ou poutres coques :

Les trois dimensions sont significatives et aucune n'est faible comparativement aux autres (Figure 1.2c).

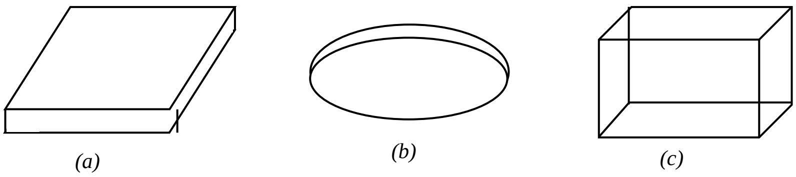


Figure 1.2

1.4 Les Deux Problèmes Fondamentaux de la RDM

La R.D.M s’attache essentiellement à deux sortes de problèmes :

- **Le Calcul (ou Dimensionnement) :** C'est le problème de la **conception**. L'ingénieur doit **déterminer les formes et les dimensions** d'une pièce en fonction des forces connues et du matériau choisi, afin de garantir qu'elle ne rompra pas et ne se déformera pas excessivement.

- **La Vérification (ou Analyse) :** C'est le problème du **contrôle**. Pour une pièce déjà dessinée (formes et matériau connus), l'ingénieur doit **calculer les efforts internes et les déformations** induites par les forces extérieures pour s'assurer que la pièce respecte les normes de sécurité.

2.1 Pour résoudre ces problèmes, la R.D.M doit établir les relations qui existent entre ces différents paramètres :

- Système des forces extérieures,
- Formes géométriques,
- Caractéristiques mécaniques des matériaux,
- Répartitions des forces intérieures,
- Déformations.

2. Forces extérieures et intérieures

A. Les **Forces Extérieures** (ou **Charges**) sont toutes les **actions** qu'une structure ou une pièce reçoit de l'extérieur. Elles sont la **cause** de tout ce qui se passe à l'intérieur du matériau (contraintes, déformations), comprennent :

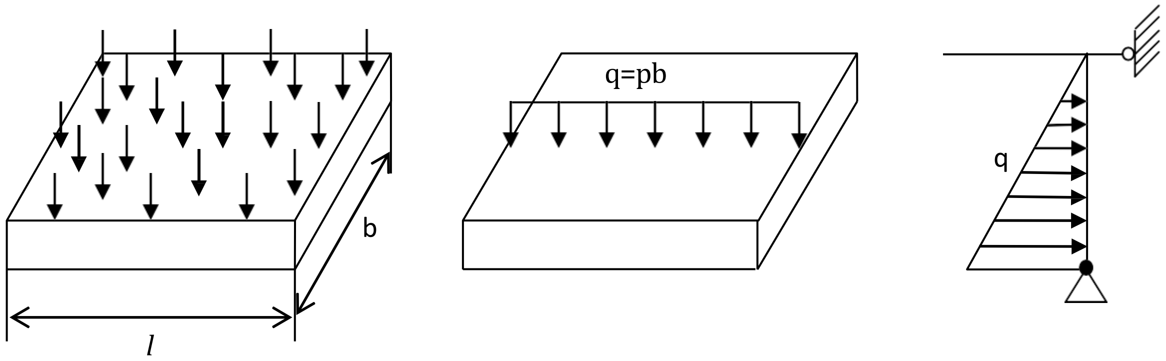
- le poids propre (action de la pesanteur),
- les forces et les couples concentrés,
- les forces et les couples répartis.

La charge ponctuelle est une **force unique** supposée appliquée sur une **surface extrêmement petite**, modélisée comme un **point** précis sur l'élément étudié (poutre, barre, etc.).

Par ailleurs, les charges sont supposées être appliquées lentement, de zéro à leur valeur finale. On dit dans ce cas que les charges sont appliquées ***statiquement*.**

Une charge répartie sur la surface qu'on peut ramener au plan principal, c'est-à-dire une charge répartie sur une ligne porte le nom de charge par unité de longueur, se désigne ordinairement par la lettre q et se mesure le plus souvent en t/m ou N/m (Fig.2.1 a et b).

Dans le cas d'une charge uniformément répartie, le diagramme de q est rectangulaire. S'il s'agit d'une pression hydrostatique, le diagramme de q est triangulaire (Fig.2.1 c).



(b) (c)

Fig.2.1

La résultante d'une charge répartie correspond numériquement à l'aire de son diagramme et s'applique au centre de gravité de ce diagramme. Lorsque la charge est répartie sur une portion quelconque de la surface d'un corps, on peut toujours la remplacer par sa résultante, appelée force concentrée P, exprimée en tonnes (t) ou en newtons (N).

On peut rencontrer des charges représentées soit sous forme de moment concentré (couple), soit sous forme de moment réparti.

Les moments sont mesurés en **t.m** ou **N.m** et sont représentés par le schéma ci-dessus (Fig.2.2).

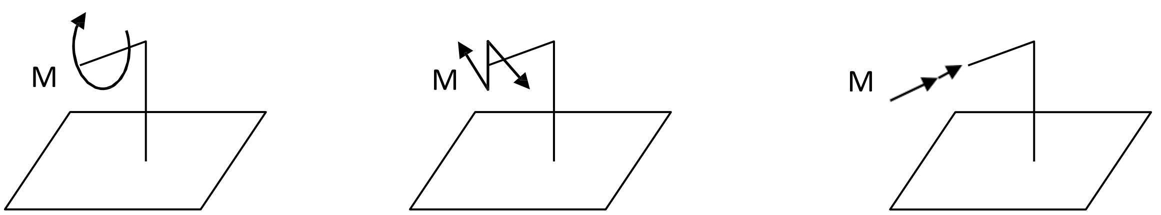


Fig.2.2

Les forces qui ne sont pas le résultat d'un contact entre deux corps mais sont appliquées en chaque point du volume occupé par le corps (poids propre, force d'inertie) s'appellent **forces volumiques ou massiques.**

B. Les Efforts Intérieurs

Les **efforts intérieurs** sont les forces et moments qui se développent à l'intérieur d'un solide déformable (barre, poutre, etc.) pour **équilibrer les charges extérieures**. Ils sont représentés par le **torseur de cohésion**, qui regroupe les six composantes principales :

a) Effort normal (N)

L'effort normal est une force intérieure **alignée avec l'axe de la barre**. Il traduit la tendance de la barre à **s'allonger** (traction) ou à **se raccourcir** (compression) sous l'action des forces extérieures.

b) Effort tranchant (Q ou T)

L'effort tranchant est une force intérieure **perpendiculaire à l'axe de la barre**, située dans le plan de la section.
Il représente la résistance du matériau contre le **glissement** ou le **cisaillement** d'une partie de la barre par rapport à l'autre.

c) **Moment fléchissant (M)**

Le moment fléchissant est un **moment intérieur** appliqué dans un plan **perpendiculaire à la section**.
Il mesure la résistance de la barre à la **flexion** ou à l'**enfoncement**, c'est-à-dire à l'effet d'une charge qui cherche à la courber.

d) Moment de torsion

Le **moment de torsion** est un **moment appliqué à un solide** qui a pour effet de **faire tourner une section autour de l'axe longitudinal de la pièce**.
Autrement dit, il provoque une **rotation ou un vrillage** de la barre ou de l'arbre autour de son axe.

Ces efforts assurent que chaque section du solide demeure en équilibre statique et peut résister aux sollicitations exercées par les charges. Leur représentation est illustrée dans la figure ci-dessous.

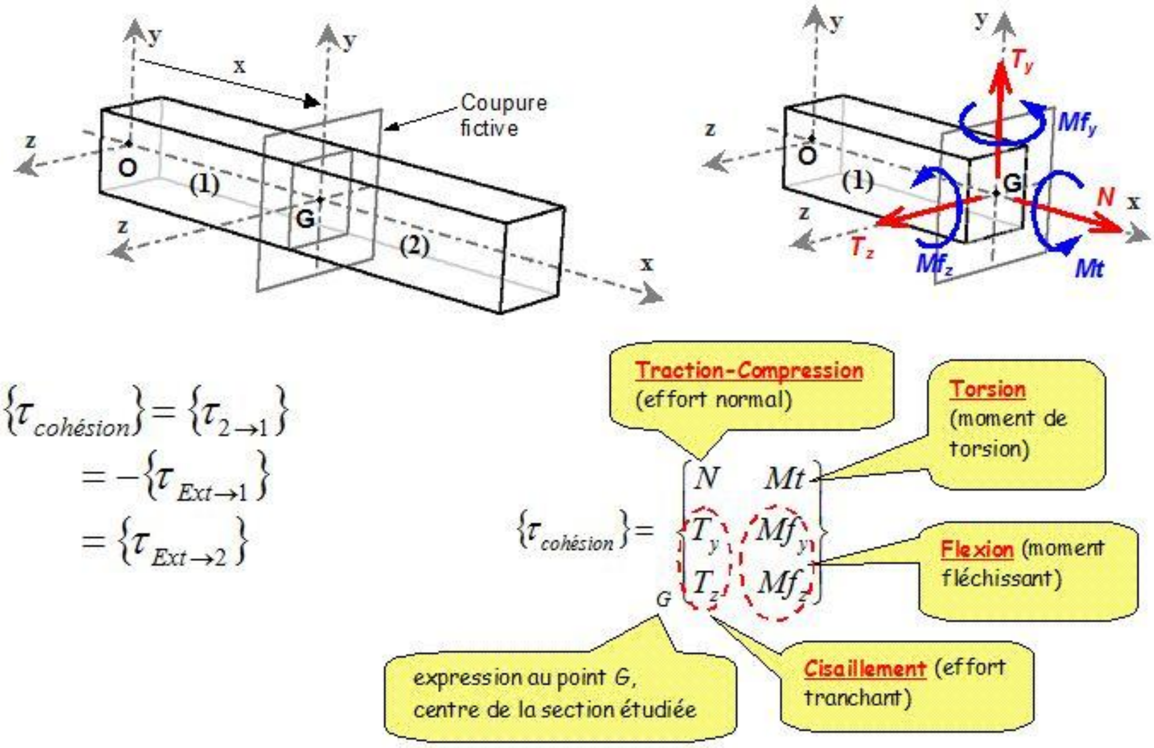


Fig 2.3

3. Appuis des systèmes plans

Les systèmes sont reliés à l'extérieur par des liaisons appelées appuis, et où apparaissent des réactions qui réagissent à l'action des forces appliquées. Les réactions et les charges exercées constituent un système de forces en équilibre, car les constructions que nous considérons sont toujours en équilibre.

La classification des appuis se fait d'après le nombre de degrés de liberté (*ddl*) (c'est-à-dire les possibilités de mouvement) qu'ils laissent au système et d'après la nature des réactions qu'ils peuvent exercer sur lui.

a) L'appui simple (Figure 2.4)

Il a deux degrés de liberté :

la rotation autour de l'appui,

- la translation parallèlement au support de l'appui.

La réaction est connue par son point d'application (point de contact du système avec l'appui) et par sa direction (elle est perpendiculaire au support). Seule l'intensité reste à déterminer.

En résumé, l'appui simple se caractérise par : 2 degrés de liberté et 1 composante de réaction. La figure 2.4 a montré le principe de fonctionnement de l'appui simple. Les figures *b*, *c* et d indiquent les représentations courantes. La représentation adoptée ici est celle de la figure *d*.

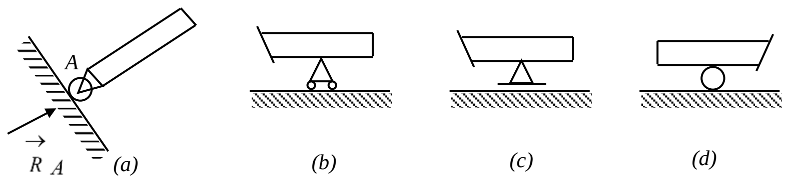


Figure 2.4 : l'appui simple.

b) L'appui double (Figure 2.5)

Il a un seul degré de liberté, la rotation autour de l'appui. Toute translation est par contre empêchée.

Dans ce cas, la réaction de l'appui est connue uniquement par son point d'application, le point de contact du système avec l'appui (point *A*) (la ligne d'action de la réaction passe par *A*). La réaction est décomposée suivant deux directions perpendiculaires et les deux composantes sont à

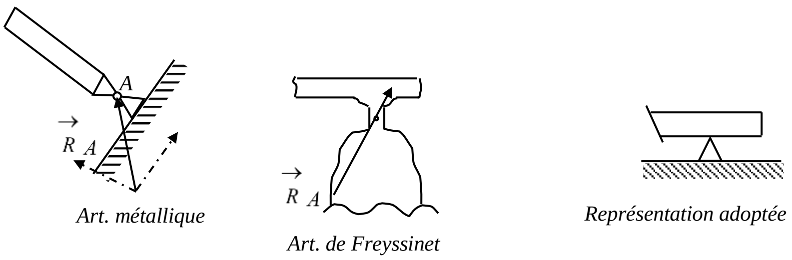


Figure 2.5 : l'appui double.

déterminer. L'appui double présente donc 1 degré de liberté et 2 composantes de réaction.

c) L'encastrement (Figure 2.6)

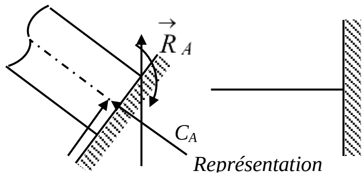


Figure 2.6: l'encastrement

Il n'a aucun degré de liberté. Tout déplacement est empêché. La réaction est un vecteur pouvant occuper n'importe quelle position du plan. On peut toutefois décomposer la réaction en 3 composantes :

- deux composantes suivant deux directions perpendiculaires et passant par *A*,
- un couple appliqué en *A*.

En définitive, l'encastrement se caractérise par : 0 degré de liberté et 3 composantes de réaction.

d) Appui déformable - Appui élastique

Un appui qui peut subir un déplacement dans la direction d'une composante de réaction est dit déformable (ex. sol compressible).

Si le déplacement est proportionnel à la composante de réaction qui l'a provoqué, l'appui déformable est dit élastique.

4. Principe général D'ÉQUILIBRE - ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système soit en équilibre sont :

a) Les sommes des projections de toutes les forces sur 3 axes passant par un point quelconque et non situés dans un même plan doivent être nulles,
b) Les sommes des moments par rapport à chacun des trois axes doivent être nulles.

Pour une construction (structure), la vérification de ces conditions signifie qu'elle ne peut se déplacer comme un tout (corps rigide), autrement dit elle est en équilibre.

Soient ***oxyz*** un repère trirectangle et $\boldsymbol{F_x}$, $\boldsymbol{F_y}$ et $\boldsymbol{F_z}$ les projections sur les axes ***ox, oy*** et ***oz*** d'une force quelconque. Les conditions d'équilibre (a) et (b) s'écrivent (cas général) :

$$\begin{array}{ll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma M /_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \Sigma M /_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & \Sigma M /_z = 0 \end{array} \qquad (4.1)$$

Les équations (4.1) sont appelées *équations d'équilibre de la statique* ou *six équations universelles d'équilibre.*

Dans le cas d'un système plan, *xy* par exemple, le système d'équations (4.1) se réduit à :

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M / \Delta = 0 \qquad (4.2)$$

- où Δ est un axe quelconque perpendiculaire au plan *xy*.

Notons que les équations d'équilibre de la statique sont écrites en travaillant sur la configuration initiale du système, c'est-à-dire non déformée ; autrement dit les déformations sont négligées.

5. Définitions et conventions des signes de N, T, M

Considérons un système, de préférence plan pour plus de clarté, constitué par une poutre prismatique (Figure 5.1).

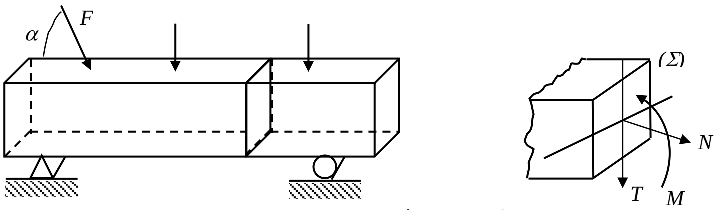


Figure 5.1

5.1 Effort normal

L'effort normal N dans la section Σ est égal à la somme algébrique des projections sur l'axe des x de toutes les forces (charges extérieures et réactions d'appui) agissant sur le tronçon à gauche de Σ (*).

$$N = \Sigma F \cos\alpha \qquad (5.1a)$$

Un effort normal exerçant une traction sur la section étudiée sera considéré comme positif.

5.2 Effort tranchant

L'effort tranchant T dans la section Σ est égal à la somme algébrique des projections sur l'axe des y de toutes les forces agissant sur la partie de la poutre située à gauche de la section Σ (*).

$$T = \Sigma F \sin\alpha \qquad (5.2b)$$

Nous conviendrons de considérer un effort tranchant comme positif s'il a tendance à faire tourner la section Σ dans le sens horlogique.

5.3 Moment fléchissant

Le moment fléchissant M dans la section Σ est égal à la somme algébrique des moments créés dans cette section par toutes les sollicitations agissant sur le tronçon à gauche de Σ (*).

$$M = \Sigma C + \Sigma F d \sin\alpha \qquad (5.3c)$$

- où C et d représentent un couple concentré courant et le bras de levier de la composante transversale de la force courante F.
-

6. Le principe de la méthode des sections est le suivant :

Un corps en équilibre est coupé suivant la section a-a (Fig.6.1).

L'une des parties est ensuite rejetée, d'habitude celle où les forces appliquées sont les plus nombreuses. Il apparait alors, les efforts intérieurs qui équilibrent les forces extérieures appliquées à la partie découpée. Dans le cas où les forces extérieures reposent dans un plan, on applique en général à la section trois efforts intérieurs : l'effort N dirigée suivant l'axe de la barre qui s'appelle effort normal ; l'effort T qui agit dans le plan de la section droite et perpendiculairement à l'axe de la barre ; appelé effort tranchant et le moment M dont le plan d'action est perpendiculaire au plan de la section (Fig.6.1). Ce moment est produit par la flexion de la barre et s'appelle moment fléchissant.

Ensuite, on applique les équations d'équilibre à la partie sectionnée du solide, ce qui permet de déterminer les efforts internes : l'effort normal N, l'effort tranchant T et le moment fléchissant M.

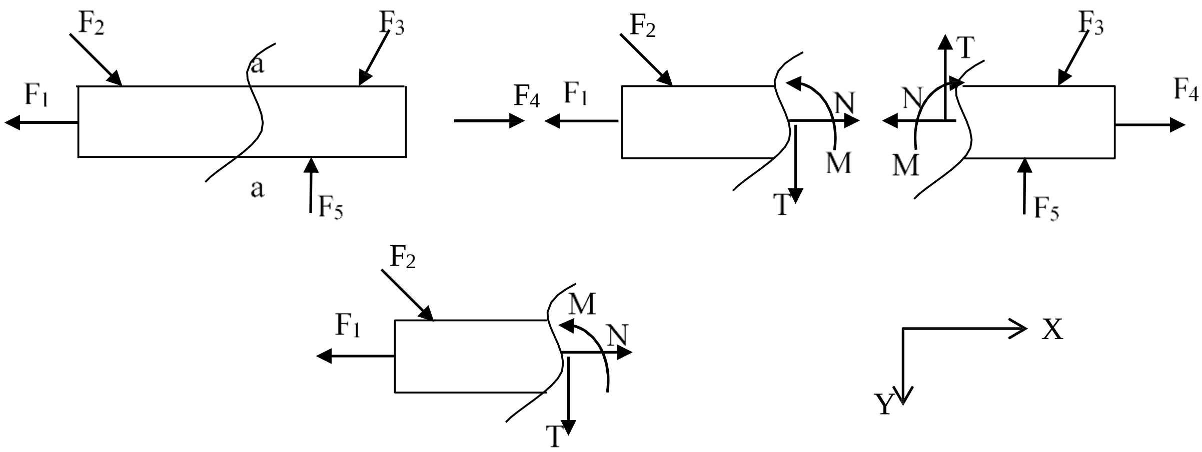
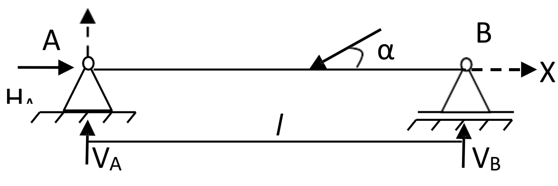


Fig. 6.1

1.1. Détermination des réactions d'appui

Considérons la poutre suivante :



Déterminons les trois inconnues : *VA ; VB et HA.*

1. La somme des projections de toutes les forces sur l'axe de la poutre est égale à zéro ;

$\Sigma F_x = 0$; d'où nous trouvons HA.

2. La somme des moments par rapport au point A est égale à 0 ; $\Sigma M_{/A} = 0$; d'où nous trouvons VB.
3. La somme des moments par rapport au point B est égale à 0 ; $\Sigma M_{/B} = 0$; d'où nous trouvons VA.
4. Pour la vérification, la somme des projections de toutes les forces sur l'axe Y ; $\Sigma F_y =$

$0 \Rightarrow V_A$ ou V_B.

5. Si le résultat d'une réaction est négatif, il convient de changer sa direction sur le dessin contre une direction opposée.
6. Si les charges agissant sur la poutre sont perpendiculaires à l'axe de cette dernière (l'axe x) ; $H_A = 0$ et on ne se sert plus de $\Sigma F_x = 0$.

Exercice :

Déterminez les réactions d'appuis pour les poutres suivantes :