

A) La symétrie est une propriété d'invariance d'un objet par une transformation géométrique de l'espace.

- symétrie ponctuelle, d'orientation ou morphologique
- symétrie de rotation ou de translation



Chapitre I :

Éléments de symétrie cristalline

3

Les éléments de symétrie sont des objets géométriques qui permettent de définir une opération de symétrie, un mouvement qui laisse un objet identique à lui-même.

→ Les principaux éléments de symétrie sont :

- Centre de symétrie (inversion)
- Axes de rotation
- Plans de symétrie (mirrors)

Def 1 Les opérations de symétrie :

1- la rotation : rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{n}$

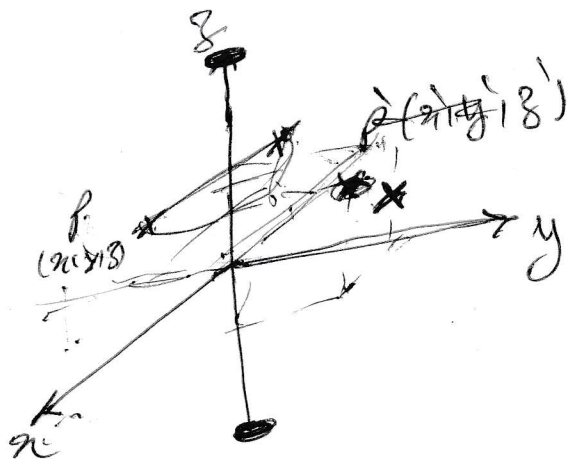
où n est un nombre entier : $n = 1, 2, 3, 4, 6$

→ une opération qui associe à tout point P de l'espace un point image P' qui est tourné de l'angle θ par rapport à l'axe de la rotation.

a) Axe binaire : $n = 2$, $\theta = \frac{2\pi}{2} = 180^\circ$ [A_2]

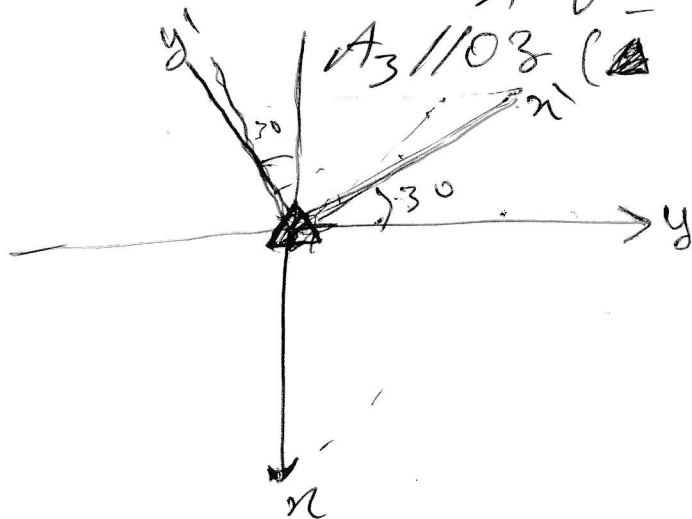
$A_2 \parallel Oz$

* l'axe A_2 est positif
seulement
par rapport à l'axe
de rotation



$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= z \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right.$$

b) Axe ternaire: $n=3$, $\theta = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$



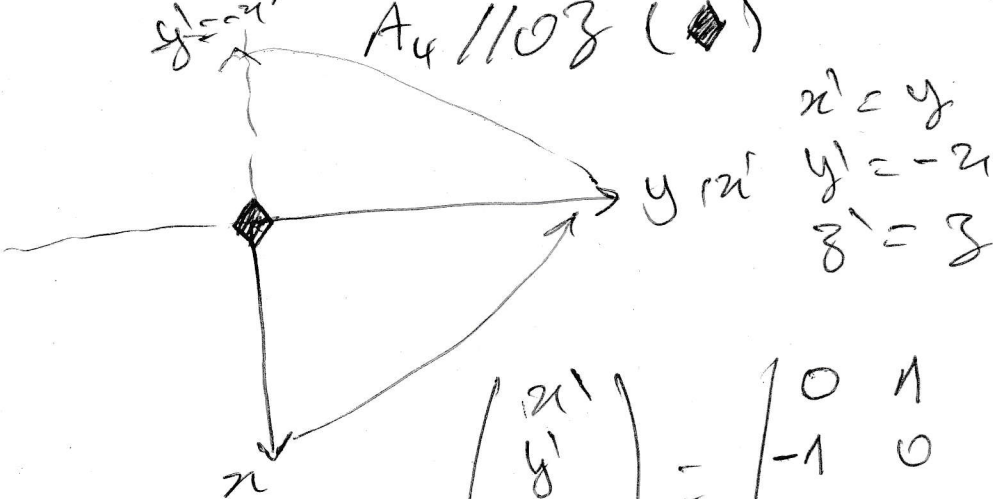
$$\begin{cases} x' = y \cos 30 - x \sin 30 \\ y' = -x \cos 30 - y \sin 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$z' = z$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c) Axe quaternaire: $n=4$, $\theta = \frac{2\pi}{4} = 90^\circ$

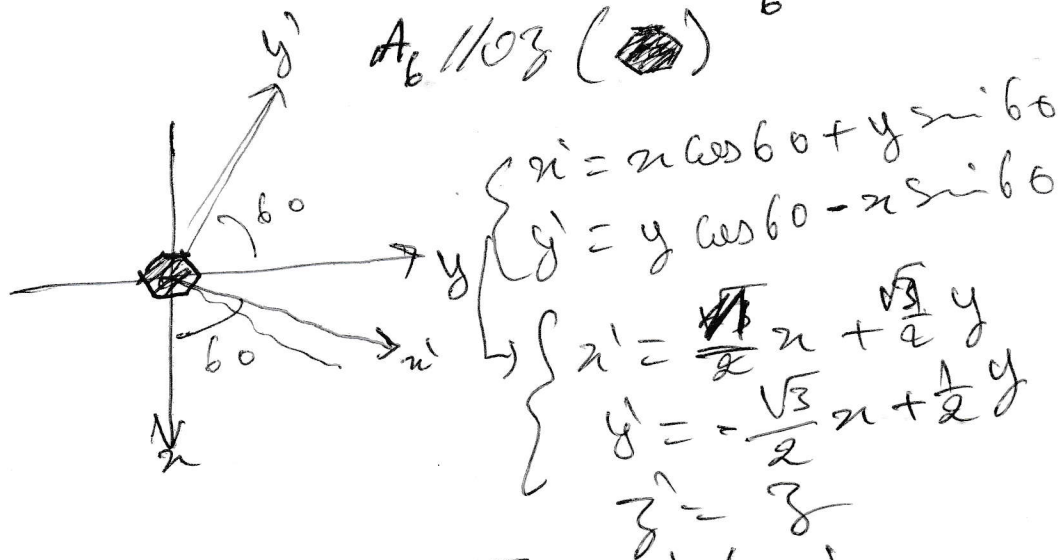
$A_4 // OZ$ (♦)



$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

d) Axe Sémaine : $n=6$, $\theta = \frac{2\pi}{6} = 60^\circ$

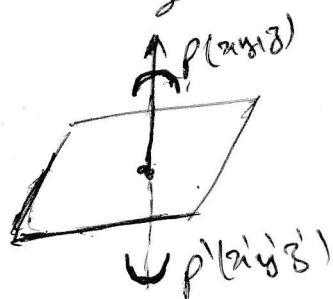


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. La réflexion (miroir): (m)

— pour un $m \perp$ au plan de dessin

└ " " miroir dans le plan de dessin

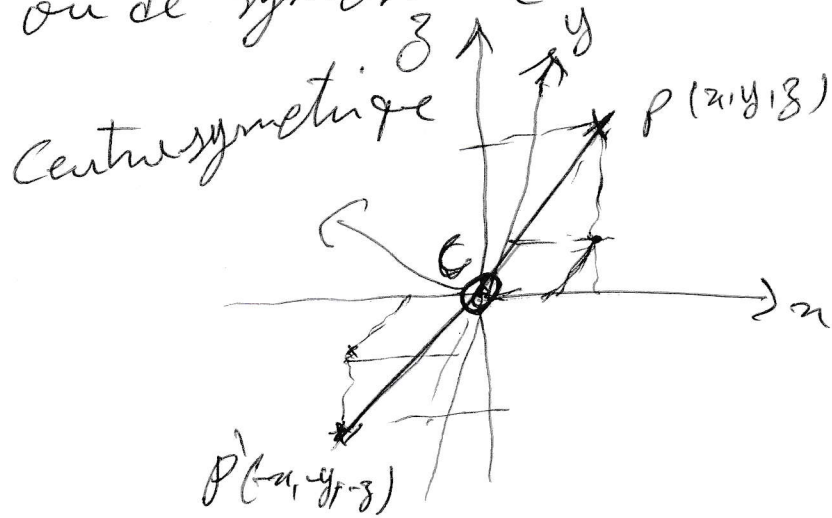


$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

m est positif seulement pour rapport au plan de projection.

3- L'inversion: La symétrie d'inversion se fait par rapport à un point, appelé centre d'inversion ou de symétrie. ($C \rightarrow O$).

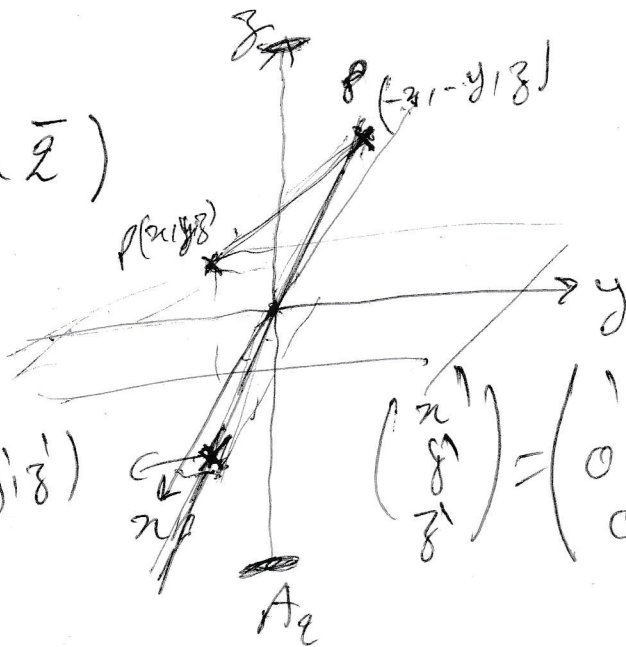


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

4- La roto-inversion: La roto-inversion est une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ suivie d'une inversion par rapport à un centre situé sur l'axe de rotation. L'élément de symétrie est appelé axe d'inversion noté $\bar{A}_n$.

exemple: $\bar{A}_2$ (ou $\bar{2}$)

cette opération est équivalente à 1 miroir // (xoy).



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

111
m (axe d'inversion)

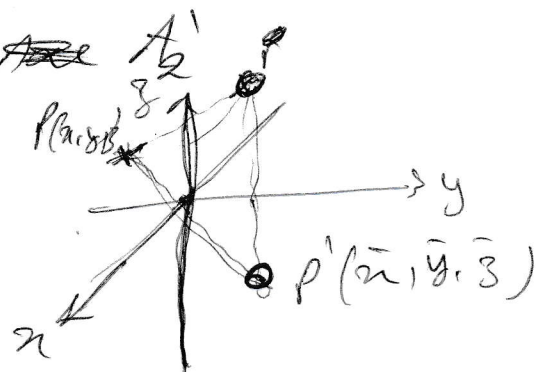
3 - La réflexion rotatoire :

C'est une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ suivie d'une réflexion dans un plan $\perp$ à l'axe.

L'élément de symétrie est un axe de réflexion.

symbole $A_n : (A_2, A_3, A_4, A_6)$ ou $(2', 3', 4', 6')$

exemple :

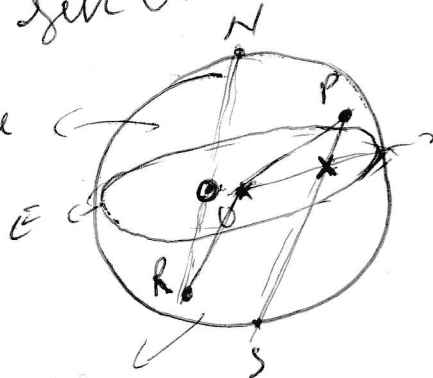


$$A_2' \equiv C \text{ ou } \bar{1}$$

Projection stéréographique des éléments de symétrie ponctuelle :

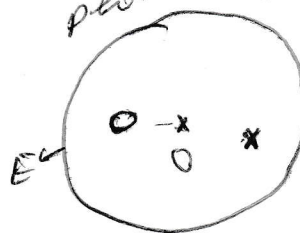
→ La projection stéréographique permet de simplifier la visualisation des éléments de symétrie et les directions équivalentes au sein de l'espace à trois dimensions des cristaux, sur une représentation plane.

hémisphère nord



hémisphère sud

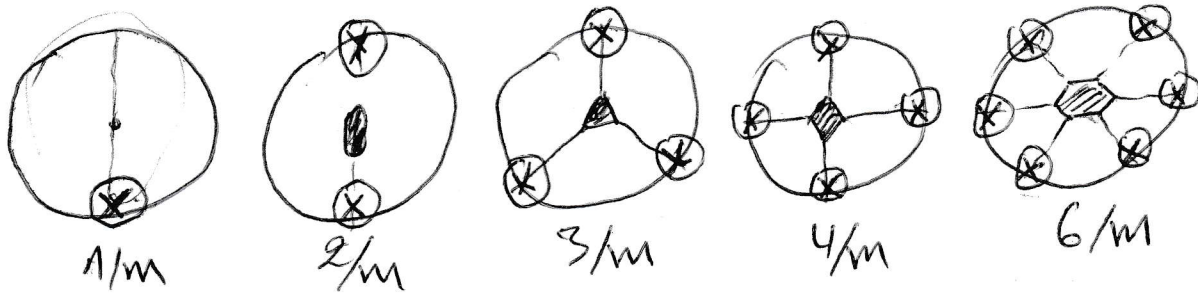
plan équatorial



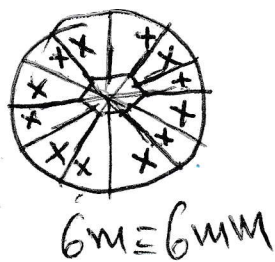
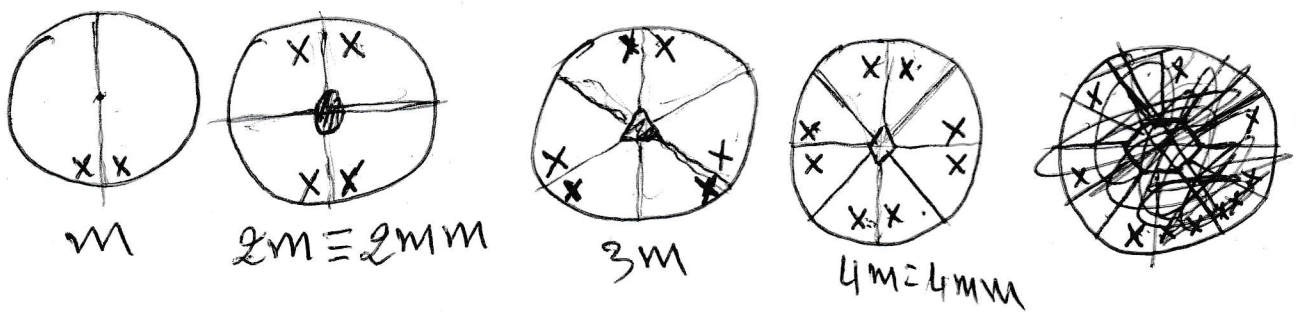
IV) Association des opérations de symétrie,

- Un cristal peut avoir plusieurs opérations de symétrie.
- On utilise les symboles de la notation internationale d'Hermann - Mauguin.

a) Association d'un miroir et un axe normal au plan du miroir, noté n/m entraîne un centre d'inversion à leur intersection.

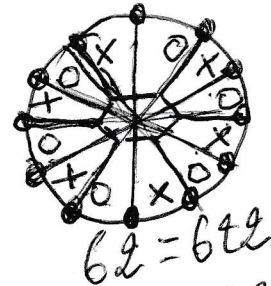
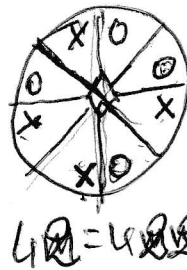
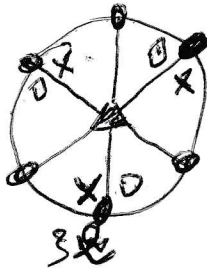
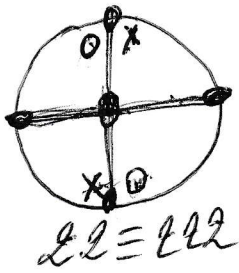
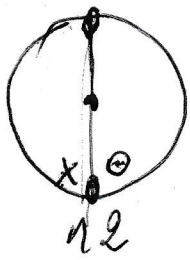


b) Association d'un axe direct n et un miroir au même plan $\langle nm \rangle$



pour un groupe de symétrie nm $\begin{cases} \rightarrow nmm \\ \rightarrow nm \end{cases}$
 nmm pour n pair et nm c'est
 n est impair.

c) Association d'un axe direct n et d'un axe direct binaire orthogonaux $\angle(A_2 \text{ ou } L)$.



Pour un groupe de symétrie $n2 \begin{cases} \rightarrow n22 \\ \rightarrow n2 \end{cases}$
 $n22$ si n est pair et $n2$ si n est impair.

$n, \bar{n}, m$

*) Groupes de symétrie:

→ Lorsqu'une figure possède un ou plusieurs éléments de symétrie, les opérations de symétrie forment un groupe au sens mathématique du terme.

a- Le produit de plusieurs opérations de symétrie du groupe est une opération de symétrie de ce groupe.

b) Le produit de plusieurs opérations de symétrie A, B et C doit être associatif: $A.(B.C) = (A.B).C$

c) L'opération (identité) existe: c'est l'opération $\underline{1}$

d) A toute opération correspond une opération inverse, tel que leur produit soit $\underline{1}$: $n\bar{n} = 1$ ($\bar{n}, m$).

- * Groupes ponctuels à 31) (32 classes cristallines);
- 1) Représentation et répartition des 32 classes cristallines
- Les symboles utilisés pour la dénomination des classes cristallines sont les suivants:

1, 2, 3, 4, 6, $\bar{1}$, $\bar{2}=m$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$, $2/m$, $4/m$, $6/m$

système	groupes ponctuels (classes cristallines)
Triclinique (P) $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ 1	1, $\bar{1}$
Monoclinique $a \neq b \neq c$, $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2} \neq \beta$ (PIS) 2	2, m, $2/m$
Orthorhombique $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ (PSIF) 4	222, 2mm, mmm
Trigonal (Rhomboédrique) $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma \neq \frac{\pi}{2}$ (P) 1	3, $\bar{3}$, 32, 3m, $\bar{3}m$
Tétraгональ (Quadratique) $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ (PI) 2	4, $\bar{4}$, $4/m$, 4mm, 422, $\bar{4}2m$, $4/mmm$
Hexagonal $a = b \neq c$, $2 = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ (P) 1	6, $\bar{6}$, $6/m$, 6mm, 622, $\bar{6}2m$, $6/mmm$
Cubique $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ (PIF) 3	23, m3, 432, $\bar{4}3m$, m3m

* Opération de symétrie des figures périodiques infinies :

a) La translation pure :

représentée par le vecteur de translation :

$$\vec{T} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}, (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ les vecteurs primitifs de la maille} \cdot u, v, w \text{ des entiers}$$

b) La translation associée à une rotation :

C'est une rotation d'un angle $\theta = \frac{2\pi}{n}$ autour d'un axe, suivie d'une translation d'une valeur τ // à l'axe de rotation. L'élément de symétrie de cette opération s'appelle axe hélicoïdal.

$$n\tau = kd \quad / \quad 0 \leq \tau < d \quad \text{et} \quad 1 \leq k \leq n$$

~~Donc~~ on note un axe hélicoïdal par n_k l'indice k donne la valeur de translation τ par rapport à d : $\tau = \frac{k}{n}d$

Pour :

$n = \frac{1}{\tau}$	2	3	4	6
$k =$	1	1	1	1
		2	2	2
			3	3
				4
				5

c) La translation associée à une réflexion :

C'est une opération de symétrie qui consiste en une réflexion dans le plan de symétrie (miroir) suivie d'une translation de $(\frac{d}{2} \text{ ou } \frac{d}{n})$ // au plan de réflexion, qu'on appelle alors plan de glissement.

(ou ligne de glissement à $2D$)

* Symboles et nature de la translation;

Symbole	Nature de la translation
m	plan ordinaire, sans translation
a	$(a/2)$ le long de x
b	$(b/2)$ " " " y
c	$(c/2)$ le long de z ; $(a+b+c)/2$ le long de la direction $[111]$ en axes rhomboédriques
n	$(a+b)/2$ ou $(b+c)/2$ ou $(a+c)/2$ ou $(a+b+c)/2$ (quadratique et cubique)
d	$(a \pm b)/4$ ou $(a \pm c)/4$ ou $(b \pm c)/4$ ou $(a \pm b \pm c)/4$ (quadratique et cubique)

* Représentations graphiques et symboles!

axes hélicoïdaux } symboles

2_1	
3_1 3_2	
4_1 4_2 4_3	
6_1 6_2 6_3	
6_4 6_5	