

## Module 2 : Déterminant d'une matrice

### Unité 1 : Déterminant d'une matrice 2x2

Soit une matrice A a 2 lignes et 2 colonnes

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Par définition, son déterminant est le nombre réel noté  $\det A$  ou  $|A|$  :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ne pas confondre les notations :

- avec des parenthèses (ou des crochets) pour une matrice,
- avec des barres pour un déterminant.

Un déterminant n'est pas une matrice. C'est un nombre réel.

$$\text{Ex } A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6$$

$$\det B = 0 - 42 = -42$$

Le déterminant concerne les matrices carrées. Une matrice dont le déterminant est différent de zéro est une matrice dite régulière. Elle est dite singulière dans le cas contraire.

### 2. Déterminant d'une matrice nxn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Considérons un élément  $a_{ij}$  de A. Si on raye dans A la ligne et la colonne contenant  $a_{ij}$ , on obtient une matrice a  $n-1$  lignes et  $n-1$  colonnes notée  $A_{ij}$ . Son déterminant  $|A_{ij}|$  s'appelle le mineur de  $a_{ij}$  dans A. On appelle cofacteur du terme  $a_{ij}$  le produit  $(-1)^{i+j} A_{ij}$

$$\det A = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}|$$

Ex matrice 3x3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Dans cet exemple, le mineur de  $a_{11}$  est  $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Pour le signe du cofacteur :  $(-1)^{i+j}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

1<sup>ère</sup> ligne + 1<sup>ère</sup> colonne (1+1)=2 nombre pair  $\rightarrow (-1)^2 = 1$  donc signe positif

1<sup>ère</sup> ligne + 2<sup>ème</sup> colonne (1+2)=3 nombre impair  $\rightarrow (-1)^3 = -1$  donc signe négatif.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

On peut développer selon les lignes ou les colonnes. Développons selon la 1<sup>ère</sup> ligne :

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 3(12 - 40) + 7(0 - 20)$$

$$= -32$$

On peut vérifier le résultat si on développe selon la 2<sup>ème</sup> ligne ou la 3<sup>ème</sup> ligne. Développons selon la 2<sup>ème</sup> ligne :

$$|A| = -2 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2(18) + 4(6 - 35) - 8(-15)$$

$$= -32$$

Développons selon la 3<sup>ème</sup> ligne :

$$|A| = 5 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 5(24 - 28) - 0 + 6(4 - 6)$$

$$= -32$$

Développons selon la 1<sup>ère</sup> colonne :

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 24 - 2(18) + 5(24 - 28)$$

$$= -32$$

On peut vérifier le résultat si on développe selon la 2<sup>ième</sup> colonne ou la 3<sup>ième</sup> colonne Développons selon la 2<sup>ième</sup> colonne :

$$\begin{aligned} |A| &= -3 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -3(12 - 40) + 4(6 - 35) - 0 \\ &= -32 \end{aligned}$$

Développons selon la 3<sup>ième</sup> colonne :

$$\begin{aligned} |A| &= 7 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 7(-20) - 8(-15) + 6(4 - 6) \\ &= -32 \end{aligned}$$

### 3. Les propriétés des déterminants

#### 3.1 Déterminant nul

Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si les vecteurs colonnes (respectivement les vecteurs lignes) sont liés.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \quad |A| = 48 - 48 = 0, \text{ la deuxième colonne est le double de la première colonne.}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad |B| = 24 - 24 = 0, \text{ la deuxième ligne est le double de la première ligne.}$$

Un déterminant qui a deux lignes identiques est nul.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = 4(0) - 1(0) + 0 = 0$$

Un déterminant qui a deux colonnes identiques est aussi nul.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

#### 3.2 Symétrie

Un déterminant ne change pas si on échange ses lignes et ses colonnes c'est-à-dire qu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8 \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8$$

### 3.3 Alternance

Si l'on échange 2 lignes d'un déterminant, celui-ci change de signe en gardant la même valeur absolue.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -32$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -24 - 3(40 - 12) + 7(20) \\ &= 32 \end{aligned}$$

A cause de la deuxième propriété, si on échange 2 colonnes d'un déterminant, celui-ci change aussi de signe en gardant la même valeur absolue.

### 3.4 Linéarité

- Si on multiplie une ligne (ou une colonne) d'une matrice par un réel  $\lambda$ , le déterminant de la nouvelle matrice est multiplié par ce réel.

Ex :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad |A| = -32$$

Multiplions la 2<sup>ème</sup> ligne par  $\frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 12 - 3(6 - 20) + 7(-10) \\ &= -16 \end{aligned}$$

- Si un vecteur colonne se présente comme la somme de deux vecteurs colonnes, le déterminant est la somme des deux déterminants obtenus en prenant successivement chacun des termes de la somme.

Ex :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4 & 6+4 \\ 3 & 4+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 16 - 18 + 32 - 12 \\ &= +18 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 30 = +18$$

- En ajoutant à une ligne un multiple d'une autre, on ne change pas un déterminant.

Ex : soit le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -32$$

On utilise cette propriété pour obtenir des 0 dans une ligne ou une colonne et ainsi simplifier le calcul du déterminant.

Si on retranche à la deuxième ligne, la première multipliée par 2, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 - 2 \times 1 & 4 - 2 \times 3 & 8 - 2 \times 7 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Si on ajoute à la troisième ligne, la première multipliée par -5, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 5 + 1 \times (-5) & 0 + 3 \times (-5) & 6 + 7 \times (-5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -15 & -29 \end{vmatrix}$$

Le calcul du déterminant est alors simplifié :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -15 & -29 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -15 & -29 \end{vmatrix} = 58 - 80 = -32$$

Autre exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Si on ajoute la première colonne à la troisième colonne et la première colonne multipliée par -2 à la quatrième colonne, on obtient :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2 \\ 2 & 3 & 2+2 & -2-4 \\ 2 & 4 & 2+2 & 1-4 \\ 3 & 1 & 5+3 & -3-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}$$

Si on retranche à la première ligne deux fois la deuxième ligne et à la troisième ligne trois fois la deuxième ligne, on obtient :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 3 - 2(4) & 4 - 2(4) & -6 - 2(-3) \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 - 3(4) & 8 - 3(4) & -9 - 3(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \\ -11 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 3(20 - 44) = -72 \end{aligned}$$

### 3.5 Déterminant d'un produit

Si A et B sont 2 matrices carrées d'ordre n, alors

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

Le déterminant du produit A.B est égal au produit des déterminants de A et de B

### 4. Rang d'une matrice

On dit qu'une matrice  $A \neq [0]$ , A de dimension quelconque différente de la matrice nulle, est de rang r si au moins l'un de ses mineurs carrés d'ordre r est différent de 0, tandis que chaque mineur carré d'ordre  $r+1$  est nul. Ou encore : le rang d'une matrice A de dimension quelconque est l'ordre de la plus grande sous-matrice carrée régulière que l'on peut extraire de A.

Une matrice nulle est de rang 0.

Ex :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (21 - 20) - 2(14 - 12) + 3(10 - 9) \\ &= 1 - 4 + 3 = 0 \end{aligned}$$

⇒ la matrice n'est pas de rang 3.

$$\text{Si on prend } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{la matrice A est de rang 2.}$$

Conséquence : Une matrice carrée A est régulière si son rang=n c'est-à-dire si  $|A| \neq 0$ . Elle est singulière sinon.

Autres propriétés sur les rangs des matrices :

Soient 2 matrices A et B

$$\text{rang}(A+B) = \text{rang } A + \text{rang } B$$

$$\text{rang } A = \text{rang } A'$$

$$\text{rang } A'A = \text{rang } AA'$$

$$\text{Si rang } X_{(n,k)} = k \text{ avec } k < n \text{ alors rang } X'X_{(k,k)} = k$$