Lois de composition internes :

On appelle opération interne sur ensemble E ou loi de composition interne. Toute application **f** de **E × E dans E :**

$$(x , y) \rightarrow f(x , y) = z$$

- L'élément $z = f(x , y)$ est appelé le composé du couple (x , y) et on le note par : $z = x * y$
- L'ensemble E des lois de composition interne est un couple noté par (E, *).

Remarque :

1- Sur $\mathbb{R}$ les lois : $x + y$; $x \times y$ sont des lois de composition internes.
→ mais : $x - y$; x / y ne sont pas des lois de composition internes.

2- Sur **P(E)** les lois **A ∪ B, A ∩ B** sont des lois de composition internes.

➢ Propriétés :

1) L'associativité :

On dit que la loi (*) est associative ssi :
$\forall x , y , z \in E : (x * y) * z = x * (y * z)$

2) La commutativité :

On dit que (*) est commutative ssi :
$\forall x , y \in E : x * y = y * x$.

3) L'élément neutre :

Soit $e \in E$. On dit que e est un élément neutre de (*) ssi :
$\forall x \in E : x * e = e * x = x$

4) L'élément symétrique :

Soit l'élément neutre de e. On dit que x' est un élément symétrique de x ssi :
$x * x' = x' * x = e$

Théorème :

1- L'élément neutre lorsqu'il existe est unique.
2- Si e est un élément neutre, (*) est associative.
3- $x \in E$ est symétrisable, alors son symétrique est unique.

➢ Les groupes :

Déf 1 :
Soit G un ensemble non vide, et soit (*) un loi de composition interne. On dit que le couple

(G, *) a une structure de groupe ssi :

1. (*) est associative.
2. Il existe dans G un élément neutre.
3. Tout élément de G accepte un élément symétrique.

Déf 2 :
Si (*) est commutative, on dit que (G , *) est un groupe commutatif.

➢ Les sous-groupes :

Déf: Soit $(G, *)$ un groupe, et soit $H < G$. On dit que H est un sous-groupe de H ssi:

1- $H \neq \emptyset$.

2- $(H, *)$ est un groupe.

Théorème :

Soit $(G, *)$ un groupe, et soit $H< G$. On dit que H est un sous-groupe de H ssi:

1- $H \neq \emptyset$.

2- $\forall\, x, y \in H : x * y \in H$.

3- $\forall\, x \in H : x^{-1} \in H$. **($x^{-1}$ est élément symétrique de x).**

➢ Les anneaux :

Déf: Soit A un ensemble non vide, de 2 lois de composition internes noté : **(+, ×)**.

On dit que (A, +, ×) est un anneau si :

1- (A, +) est un groupe commutatif.

2- (×) associative.

3- (×) distributive sur (+).

$$\{\, \mathbf{a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)}$$

$$\{\, \mathbf{b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)}$$

Remarque :

1- On dit que (A, +, ×) est un anneau commutatif si (×) est commutative.

2- (A, +, ×) est un anneau unitaire si (×) accepte un élément neutre.

➢ Le corps :

Déf: On dit que l'ensemble K de deux lois de composition internes **(+, ×)** est corps ssi :

1- (K, +, ×) est un anneau unitaire.

2- (K*, ×) est un groupe (K* = K-{0}). 0 est l'élément neutre % **(+).**

Remarque :

Si (×) est commutatif. On dit que le corps K est corps commutatif.

➢ Les espaces vectoriels:

Déf: Soit K un corps commutatif et E un ensemble non vide de 2 lois de composition internes : (+) et (×).

On dit que $(E, +, \times)$ est un espace Vectoriel sur K:

1- $(E, +)$ est un groupe ablien (groupe commutatif).

2- $\forall\ \alpha, \beta \in K; \forall x \in E: (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$.

3- $\forall\ \alpha \in K; \forall x,y \in E: \alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x+\alpha\cdot y$.

4- $\forall\ \alpha,\beta \in K; \forall x \in E: (\alpha\cdot\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)$.

5- $\forall\ x \in E$: $1K\cdot x = x$, (1K est élément neutre de K % (×)).

Remarque :

Les éléments de E dite des vecteurs, et les éléments de K dite des scalaires.

1- $\forall\ \lambda \in K: \lambda\cdot 0_E = 0_E$

2- $\forall\ x \in K: 0_K\cdot x = 0_K$

3- $\forall\ \lambda \in K, \forall x \in K: \lambda(-x) = -(\lambda\ x)$

4- $\forall\ \lambda \in K; \forall\ x \in E: \lambda\cdot x = 0_E \Longrightarrow \{\lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E\}$

➢ Sous-espace vectoriel (S. e. V) :

Déf : Soit E un e.V sur K ; $F \subseteq E$ tq : $F \neq \emptyset$; F est un sous espace Vectoriel de E ssi :

Théorie 01 : Soit E un e. V sur K ; $F \subseteq E$. On dit que F est un S. e .V. de E ssi :

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in F$; $x + y \in F$
3. $\forall x \in F, \forall \lambda \in K$; $\lambda \times x \in F$

Théorie 02: F est un S. e. V. ssi :

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \beta \in K$; $\lambda \times x + \beta \times y \in F$

Les Propriétés :

1. L'intersection de (S. e. V) de E est aussi un S. e. V de E.
2. L'union de (S. e. V) de E n'est pas toujours un S. e. V de E.

➢ Les combinaisons linéaire :

Déf 1: Soit E un e.V sur K, possédant $x_1, x_2, ..., x_n$ vecteurs de E. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ scalaires de K :

Le vecteur $x = \lambda_1 \times x_1 + \lambda_2 \times x_2 + ... + \lambda_n \times x_n$ est appelé : combinaison linéaire de $\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n}$

Déf 2 : On dit que E est engendré : $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ssi : $x \in E$, x s'écrit comme combinaison linéaire de $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$\forall x \in E : \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$

$\{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ engendre E et on note : $E = \{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n \}$

➢ Indépendance linéaire :

Déf : On dit que $\{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ sont linéairement indépendants ssi :

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0_E$ (élément neutre) $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$

Remarque :

- On dit que $\{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ sont linéairement indépendants s'ils ne sont pas linéairement indépendants.

Exemple : $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) + \lambda_3 (0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda_1,0,0) + (0,\lambda_2,0) + (0,0,\lambda_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ donc A est linéaire indépendant.

➢ L'espace Vectoriel produit :

Déf : Soit $E_1, E_2, ..., E_n$: n-espaces Vectoriels sur K alors: $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{ (x_1,x_2,...,x_n) / x_1 \in E, x_2 \in E, ..., x_n \in E \}$ est un espace vectoriel sur K des lois (+) et (×) est défini par :

→ des lois (+) est défini par : $(x_1,x_2,...,x_n) + (y_1,y_2,...,y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

→ des lois (×) est défini par : $\lambda(x_1,x_2,...,x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$

$\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ est dit espace Vectoriel produit des n. e. V.

➢ Somme des espaces vectoriels:

Th1: Soient $E_1, E_2, ..., E_n$: n. e. V sur K;

$\Rightarrow E_1 + E_2 + ... + E_n = \{x_1 + x_2 + ... + x_n / x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, ..., x_n \in E_n\}$

⇒ Alors: $E_1 + E_2 + ... + E_n$ est un sous-espace vectoriel (S.e.V) de E: $E_1 + E_2 + ... + E_n \subseteq E \Rightarrow E_1 + E_2 + ... + E_n$: appelé somme de n espaces $E_1, ..., E_n$

➢ La somme directe des Sous-espaces vectoriels (S.e.V)

Def: Soit E un e. V sur K, et soient $E_1, E_2, ..., E_n$: S.e.V de E. On dit E est la somme directe de $E_1, E_2, ..., E_n$: $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$ et on note:

1. $E = E_1 + E_2 + ... + E_n$
2. $E_i \cap (E_1 + E_2 + ... + E_n) = \{0_E\}$

Exemple: pour n = 3:

$\Rightarrow E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \Leftrightarrow$ 1 $E = E_1 + E_2 + E_3$ 2 $E_1 \cap (E_2 + E_3) = \{0_E\}$

$E_2 \cap (E_1 + E_3) = \{0_E\}$

$E_3 \cap (E_1 + E_2) = \{0_E\}$

pour n = 2:

$\Rightarrow E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow$ 1 $E = E_1 + E_2$ 2 $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$

⇒ On dit que E_1 & E_2 sont des espaces supplémentaires de E.

➢ Base et dimension d'un espace Vectoriel

• La Base :

Déf : Soit E e. V sur K- On dit que les vecteurs $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ forment une base de E ssi :

(1) $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sont linéaire indépendant (lin ind)

(2) tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$

Exemple : $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ est une base des $\mathbb{R}^2 \rightarrow \{e_1, e_2\}$ sont lin ind ?

Solution :

$\rightarrow \{e_1, e_2\}$ sont lin ind ? $\rightarrow \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ ssi : $\rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \rightarrow \lambda_1(1,0) = (\lambda_1, 0) \rightarrow \lambda_2(0,1) = (0, \lambda_2) \rightarrow (\lambda_1 + 0, 0 + \lambda_2) = (0,0) \rightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_2 = 0 \rightarrow$ donc $\{e_1, e_2\}$ sont des linéaire indépendant (lin ind).

Remarque :

$\rightarrow \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$\rightarrow \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

• La dimension :

Def : Soit E e. V sur K. Le nombre des vecteurs de la base de E, s'appelle la dimension de E et noté par : dim E.

Remarque : Si le nombre des vecteurs de la base est n, on dit que E est de dimension finie et on écrit dim E = n.

$\rightarrow$ dim $\{0\}$= 0.

$\rightarrow$Si $x = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n\}$, les scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \rightarrow$ appelent composante de x.

$\rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$; $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Th1 : Soit E e.V sur K, de dimension finie et F un S.e.V de E, Alors $\rightarrow \dim F \leq \dim E$

Th2 : Soit E e. V sur K de dimension finie et F un S.e.V de E, Alors il existe deux sous espaces F et G dans E tels que : $\rightarrow E = F \oplus G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

Remarque : Soit E e. V sur K de dimension finie et soient E_1, E_2, 2 S.e.V de E, de dimension finie, Alors :

$\rightarrow \dim (E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim (E_1 \cap E_2)$

$\rightarrow \dim(E_1 + (E_2 + E_3)) = \dim(E_1) + \dim(E_2 + E_3) - \dim(E_1 \cap (E_2 + E_3))$

Th3 : Soit E e. V sur K, de dimension finie et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_m)$ 2 bases de E. Alors : $\rightarrow n = m$

Théorème (Théorème de base incomplète) : Soit E e.V sur K de dimension finie n, et soit $(x_1, x_2, ..., x_p) \in E^n$ tel que $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est vecteurs linéairement indépendants.

Eq : $p < n$, alors il existera des vecteurs $x_{p+1}, ..., x_n \in E$ tels que $(x_1, x_2, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_n)$ forment une base de E, c-à-d, on peut compléter une partie des vecteurs qui sont lin ind par des éléments de E pour obtenir une base de E.

➢ Les applications linéaires :

Déf 1 : Soit E, F deux espaces vectoriels sur K. On dit que l'application $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire ssi :

① $\forall x, y \in E$; $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ② $\forall \lambda \in K, \forall x \in E$; $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Déf 2 : On dit que f est une application linéaire : $f : E \rightarrow F$

$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \beta \in K$; $f(\lambda x + \beta y) = \lambda f(x) + \beta f(y)$

• Image et noyau d'une application linéaire :

Déf : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle noyau de f et on note par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \,/\, f(x) = 0_F\}$$

$\Rightarrow$ et on appelle image de f et on note par : $\mathrm{Im} f = \{y \in F \,/\, \exists\, x \in E \,;\, f(x) = y\}$; $f(E)$

propositions: Soit $f: E \rightarrow F$ une app lin:

① Ker f est un S.e.V de E

② Im f est un S.e.V de F

③ f est surjective $\Leftrightarrow$ Im f = F

④ f est injective $\Leftrightarrow$ Ker f = $\{0_F\}$

Th: (Détermination dim app lin)

$\Rightarrow$ Soit E, F deux e.V sur K, soit $\{x_1, ..., x_n\}$ une base de E, et soit $\{y_1, ..., y_n\}$ une base de F, il soit $\{y_1, ..., y_n\}$ n vecteurs de F. $\Rightarrow$ Alors il existe une app linéaire une que: $f: E \rightarrow F$ t.q $\forall i \in \{1, ..., n\}$ $f(x_i) = y_i$

c.à.d pour déterminer une app linéaire une e.V de dimension finie E des un e. V.F, il suffit de donner l'image de la base de E: $\{x_1, ..., x_n\}$ une base de E $\Rightarrow$

$\forall x \in E \ \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K \ x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$

$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n)$

$f(x) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n)$

f est app linéaire

$f(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n, \ y_i \in F$

- ## Le rang (dimension d'image) :

Déf : Soit f : E $\rightarrow$ F une app linéaire $\rightarrow$ l'image de f est appelée rang f et on le note parfois Im(f) $\rightarrow$ le rang de f est le nombre dim(Im(f)) c-à-d : rang(f) = dim(Im(f)).