Les matrices:

- **Déf: Somme de deux matrices:** La somme de deux matrices $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ de même ordre est une matrice $c=(c_{ij})$ tel que: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c = A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m1}+b_{m2} & a_{m1}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Déf: Le produit d'une matrice :** $A=(a_{ij})$ par un scalaire $\alpha \in K$, est une matrice:

$$B = \alpha \times A = \begin{bmatrix} \alpha\, a_{11} & \alpha\, a_{12} & \alpha\, a_{1n} \\ \alpha\, a_{21} & \alpha\, a_{22} & \alpha\, a_{2n} \\ \alpha\, a_{m1} & \alpha\, a_{m2} & \alpha\, a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **Propriétés:**

1. $\alpha \times (A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha_1 + \alpha_2) \times A = \alpha_1 A + \alpha_2 A$
3. $(\alpha_1 \times \alpha_2) \times A = \alpha_1 \times (\alpha_2 \times A)$
4. $1 \times A = A \qquad 1\times \alpha = \alpha$

➔ Donc, on conclut que $(M_{mn}(K), +, \times)$ est un e.V sur K, et il s'appelle l'espace vectoriel des matrices.

➔ Le produit de (2) matrices $A = (a_{ij})$ par $B = (b_{ij})$ on définit le nbre de colonne de A = le nbre de ligne B

➔ Le produit $A \times B = C$: est une matrice d'ordre : $m \times n$

Remarque: ➔ $A \times B$ est défini mais $B \times A$ n'est pas défini. ➔ Si le produit $A \times B = B \times A$ on dit que le produit de A par B est commutatif, mais le cas général, le produit de (2) matrices n'est pas commutatif.

- **Déf: Soit K un corps; $A \in M_n(K)$**

S'il existe une matrice $B \in M_n(K)$, tq: $A \times B = B \times A = I_n$,.

→ On dit que A est inversible dans $M_n(K)$, et B s'appelle l'inverse de A et notée: A^{-1}

EXP: Calculer A^{-1} de la matrice.

solution:

$$\mathbf{A \times B = I_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} - b_{21} & b_{12} - b_{22} \\ 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{ b_{11} - b_{21} = 1 \quad b_{12} - b_{22} = 0 \}$

$\{ 2b_{11} + b_{21} = 0 \quad 2b_{12} + b_{22} = 1 \}$

$\{ 3b_{11} = 1 \Rightarrow b_{11} = 1/3 \quad b_{21} = 1/3 - 1 = -2/3 \}$

$\{ 3b_{12} = 1 \Rightarrow b_{12} = 1/3 \quad b_{22} = 1/3 \}$

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

- ## Le transposé le trace d'un matrice:

Déf: Soit K un corps, et soit $(a_{ij}) \in M_{mn}(K)$

- Le transposé de matrice A est: Une matrice $B = (b_{ij})$ tq $a_{ij} = b_{ji}$ c-à-d: ⟶ Les colonnes de A sont les lignes de B et les lignes de A sont les colonnes de B. ⟶ Le transposé de A est notée: A^t

Exp: $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A^t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$Tran(A) = (1) + (-1) + (-2) = -2$

Remarque: ⟶ Si $A = A^t$ on dit que A est une matrice Symétrique et ona $(A^t)^t = A$

⟶ $(A + B)^t = A^t + B^t$

⟶ $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

⟶ $(A \,.\, B)^t = B^t \,.\, A^t$

⟶ $Tran\,(A + B) = Tran\,(A) + Tran\,(B)$

⟶ $Tran\,(\lambda \,.\, A) = \lambda \,.\, Tran\,(A)$

- ## Le rang de la matrice :

Déf : soit $A \in M(K)$. Le rang de la matrice A = le nbre maximum des lignes ou les colonnes qui linéairement indépendants.

Remarque : Pour déterminer le rang d'une matrice A. On utilise la méthode d'élimination de Gauss.

Exp :

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Le rang (A) = 3 $\Rightarrow$ donc le rang (A) est 3

- ## La matrice de passage

Déf : Soit V un e.v. sur K :

Soient (V_1 , V_2 , V_n) (U_1 , U_2 , U_n) : 2 bases de V .

alors ona :

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}V_1+a_{21}V_2-\cdots+a_{n1}V_n \\ U_2 &= a_{12}V_1+a_{22}V_2-\cdots+a_{n2}V_n \\ U_n &= a_{1n}V_1+a_{2n}V_2+\cdots+a_{nn}V_n \end{aligned}$$

$\rightarrow$ L'appelle la matrice de passage de $(V_1 , V_2 \ldots V_n)$ à $(U_1 , U_2 \ldots U_n)$ est notée P ;

Remarque : Soit la matrice de passage de la base $(U_1 , U_2 \ldots U_n)$ à la base $(V_1 , V_2 \ldots V_n)$ et Soit Q la matrice de la passage de la base $(V_1 , V_2 \ldots V_n)$ à $(U_1 , U_2 \ldots U_n)$ donc :

$Q = P^{-1} \Rightarrow P . Q = I_n$; exemple :

$$\mathbf{P \times Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I_2}$$