

- En utilisant la formule 1 on trouve que :

$$\begin{cases} s_1 = P(T_s = X_{1:4}) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \\ s_2 = P(T_s = X_{2:4}) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \\ s_3 = P(T_s = X_{3:4}) = \frac{0}{24} = 0 \\ s_4 = P(T_s = X_{4:4}) = \frac{0}{24} = 0 \end{cases}$$

alors ce système a un vecteur de signature $s = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.

- En utilisant la formule 1 on trouve que :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{r_1}{\binom{4}{1}} = \frac{0}{4} = 0 \\ \alpha_2 = \frac{r_2}{\binom{4}{2}} = \frac{0}{6} = 0 \\ \alpha_3 = \frac{r_3}{\binom{4}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \alpha_4 = \frac{r_4}{\binom{4}{4}} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

donc on a :

$$\begin{cases} s_1 = \alpha_4 - \alpha_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ s_2 = \alpha_3 - \alpha_2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\ s_3 = \alpha_2 - \alpha_1 = 0 - 0 = 0 \\ s_4 = \alpha_1 - \alpha_0 = 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

alors ce système a un vecteur de signature $s = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.

3.1.4 Formule de la fiabilité du système via les signatures

Nous établissons maintenant une propriété fondamentale de la signature d'un système, à savoir que la distribution de la durée de vie du système T , donnée des composants i.i.d avec fonction de distribution commune F . La représentation dans le théorème suivant est tirée de Samaniego (1985).

Théorème 5 Soit $X_1, X_2, \dots, X_n \sim F$ les durées de vie des composants i.i.d. d'un système cohérent d'ordre n , et soit T la durée de vie du système. alors :

$$\bar{F}_T(t) = P(T > t) = \sum_{i=1}^n s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\bar{F}(t))^{n-j} \quad (3.11)$$

Preuve. On note d'abord que le système est en panne en même temps que la panne de l'un de ses composants, de sorte que T prendra nécessairement les valeurs de l'une des statistiques d'ordre $X_{i:n}$ de l'échantillon $X_1, X_2, \dots, X_n$, c.à.d $T \in \{X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}\}$ avec la probabilité 1. Ensuite, en utilisant la loi de la probabilité totale et l'hypothèse de i.i.d. sur les durées de vie des composants, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 P(T > t) &= \sum_{i=1}^n P(T > t, T = X_{i:n}) \\
 &= \sum_{i=1}^n P(T > t \mid T = X_{i:n}) P(T = X_{i:n}) \\
 &= \sum_{i=1}^n s_i P(X_{i:n} > t) \\
 &= \sum_{i=1}^n s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\bar{F}(t))^{n-j}
 \end{aligned}$$

■

En inversant l'ordre des sommations dans (3.11), la représentation de la fiabilité du système dans (3.11) peut être écrite sous la forme alternative :

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^n s_i \right) \binom{n}{j} (F(t))^j (\bar{F}(t))^{n-j} \quad (3.12)$$

Proposition 2 Tout système cohérent peut être écrit comme un mélange généralisé des systèmes "k – sur – n". Plus explicitement, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des durées de vie interchangeables, alors la fiabilité d'un système cohérent peut être écrit comme suit :

$$R(t) = \sum_{i=1}^n s_i P(T_{i:n} > t) = \sum_{i=1}^n s_i R_{i:n}(t) \quad (3.13)$$

et

$$R(t) = \sum_{i=1}^n a_i P(T_{1:i} > t) = \sum_{i=1}^n a_i R_{1:i}(t) \quad (3.14)$$

ou :

$$R(t) = \sum_{i=1}^n b_i P(T_{i:i} > t) = \sum_{i=1}^n b_i R_{i:i}(t) \quad (3.15)$$

où :

- les vecteurs $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sont respectivement les signatures minimales et maximales du système.
- Pour $1 \leq i \leq n$, les variables aléatoires $T_{i:n}$, $T_{1:i}$ et $T_{i:i}$ représentent respectivement les durées de vie des systèmes "i – sur – n : F", série et parallèle avec i composants.

Remarque 19 Nous serons intéressés par la comparaison de deux systèmes avec des composants i.i.d., la durée de vie d'un système cohérent avec des composants i.i.d. ne dépendent de la structure du système que par la signature s. En effet, si deux systèmes en des composants i.i.d. ont la même signature, le comportement stochastique de leurs vies est identique. Il est naturel de se demander si deux systèmes cohérents différents peuvent avoir la même signature ? La réponse est oui ; On peut voir d'après le tableau précédent que les systèmes à quatre composantes étiquetés comme systèmes 11 et 13 ont la même signature. Les vingt systèmes cohérents d'ordre quatre donnent précisément 17 signatures distinctes.