$$s_i = \frac{1}{\binom{n}{n-i+1}} \sum_{\substack{A\subseteq C \\ |A|=n-i+1}} \phi(A) - \frac{1}{\binom{n}{n-i}} \sum_{\substack{A\subseteq C \\ |A|=n-i}} \phi(A). \tag{3.5}$$

où $|A| = card\ A$ t.q. $A \subseteq C$ et $i \in A$ ssi $x_i = 1$.

Remarque 18 *La signature ne dépend pas de la distribution des variables $T_1, ..., T_n$ mais uniquement de la fonction de structure. Alors le calcul de s_i peut être difficile car il nécissite l'évaluation de $\phi(A)$ pour chaque $A \subseteq C$.*

3.1.2 Types de signatures

Définition 17 *On dit que les durées de vie $T_1, T_2, ..., T_n$ ont une distribution absolument continue interchangeable, si la distribution conjointe de $T_1, T_2, ..., T_n$ est invariante par permutation des variables. c.à.d, pour chaque n :*

$$P(T_1 \leq t_1, ..., T_n \leq t_n) = P(T_{\sigma(1)} \leq t_1, ..., T_{\sigma(n)} \leq t_n)$$

pour toute permutation $\sigma = (\sigma(1), ..., \sigma(n))$ de $(1, 2, ..., n)$.

Définition 18 ***(Signatures minimales et maximales)*** *Pour tout système cohérent constitué de composants interchangeables, les signatures minimales et maximales du système respectivement sont les vecteurs $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ avec :*

$$a_i = \binom{n}{i} \sum_{j\in A_i} \frac{r_{n-j}(n)}{\binom{n}{j}} (-1)^{i+j-n} \binom{i}{n-j} \tag{3.6}$$

et

$$b_i = \binom{n}{i} \sum_{j\in B_i} \frac{r_{n-j}(n)}{\binom{n}{j}} (-1)^{i-j+1} \binom{i}{j} \tag{3.7}$$

a_i et b_i sont des nombres réels (uniques) et qui ne dépendent pas de la distribution conjointe de $(X_1, X_2, ..., X_n)$ et satisfont $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$, et A_i, B_i sont des ensembles qui dépendent de la structure cohérente.

Définition 19 ***(Signature comulative et de queue)*** *Les vecteurs $S = (S_1, ..., S_n)$ et $\overline{S} = (\overline{S}_1, ..., \overline{S}_n)$ sont appelés signature comulative et signature de la queue, respectivement, où :*

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} s_i \quad et \quad \overline{S}_k = \sum_{i=k+1}^{n} s_i \tag{3.8}$$

t.q :

$$S_0 = 0, \overline{S}_0 = 1 \quad et \quad \overline{S}_n = 0 \tag{3.9}$$

3.1.3 Relation entre signature d'un système et son dual

Le concept de la dualité de deux systèmes a été formellement défini au chapitre 1. On peut profiter des relations de dualité pour réduire la moitié des calculs des signatures de tous les systèmes cohérents d'une taille donnée, comme l'indique le théorème suivant :

Théorème 4 *Soit s la signature d'un système cohérent (C, ϕ) dont les n composants sont i.i.d., et soit s^D la signature de son système dual (C, ϕ^D). Alors*

$$s_i = s^D_{n-i+1} \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3.10}$$

Preuve. Pour la preuve, voir Kochar, Mukerjee Samaniego [15] ■

1. Parmi les cinq systèmes d'ordre 3 (remarque (17)) le premier système est le dual du troisième, le quatrième est le dual du cinquième et le deuxième est le dual de lui même.
2. Le tableau suivant fournit les signatures des 20 systèmes cohérents distincts d'ordre 4.

système	les coupes minimals	signature
1	$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$	$(1, 0, 0, 0)$
2	$\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$
3	$\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$	$(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$
4	$\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)$
5	$\{1\}, \{2, 3, 4\}$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$
6	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
7	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
8	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}; \{2, 4\}$	$(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$
9	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$	$(0, 1, 0, 0)$
10	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
11	$\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
12	$\{1, 2\}, \{3, 4\}$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
13	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
14	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
15	$\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$
16	$\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$
17	$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$	$(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
18	$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}$	$(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
19	$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$	$(0, 0, 1, 0)$
20	$\{1, 2, 3, 4\}$	$(0, 0, 0, 1)$

Par exemple, pour le deuxième système dans le tableau précédent, nous calculons la signature comme suit :