
CHAPITRE 3

Signatures des systèmes et leurs relations avec des indices de fiabilité

Dans ce chapitre, nous introduisons une caractéristique d'un système appelé "signature". Dans les sections qui suivent, nous allons décrire et interpréter les signatures d'un système et nous discuterons leur utilité dans les comparaisons entre systèmes. Nous fournissons des exemples dans lesquels les signatures des systèmes sont calculées et comparées. Ensuite, nous donnons les relations entre des indices de fiabilité des systèmes et leurs signatures dans les cas réparables et non réparables. Avant de procéder à ce plan, nous présentons dans cette section une définition formelle du concept, un bref aperçu de ses origines.

3.1 Signatures des systèmes

Le concept de signature du système, introduit par Samaniego (1985) pour des systèmes cohérents avec des composants indépendants et distribués identiquement (i.i.d.), est devenu un outil très utile dans l'analyse de la fiabilité du système. Une monographie pour la signature et ses applications en fiabilité a été rédigée par Samaniego (2007).

Définition 16 Soit un système cohérent à n composants (C, ϕ) où $C = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble de ses composants et $\phi : \{0; 1\}^n \longrightarrow \{0; 1\}$ sa fonction de structure. Nous supposons également, sauf indication contraire, que les durée de vie des n composants du système $T_1, \dots, T_n$ sont i.i.d..

La signature de ce système, notée s , est un vecteur de probabilités $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ dont l'élément s_i est égal à la probabilité que la panne du composant i provoque la panne du système, c.à.d :

$s_i = P(T = T_{i:n})$, avec $\sum_{i=1}^n s_i = 1$ où T désigne la durée de vie du système et $T_{i:n}$ désigne la $i^{\text{ème}}$ plus petite durée de vie, c'est-à-dire la statistique d'ordre i obtenue en réarrangeant les variables $T_1, \dots, T_n$ par ordre croissant.

- Remarque 16** – La relation $\sum_{i=1}^n s_i = 1$ implique que le système fonctionne si tous ces composants fonctionnent, en panne si tous ces composants tombent en panne, et que la panne du système ne peut survenir que lorsque certains composants tombent en panne.
- La signature fournit une description qualitative de la structure du système qui peut être utilisée dans la quantification de la fiabilité.
 - Le calcul des signatures n'est pas une tâche facile dans le cas général, surtout lorsque le système comporte un grand nombre de composants. Triantafyllou et Koutras (2008) ont fourni des formules qui facilitent l'évaluation de la signature de structure cohérente en utilisant la notion de la fonction génératrice, tandis que Eryilmaz (2010) a développé des expressions intéressantes pour le calcul des signatures minimales et maximales d'un système cohérent.

3.1.1 Formules de la signature

La signature d'un système cohérent peut être définie de différentes manières.

Formule 1 : - Kochar et al. (1999) [12] ont montré que, pour $i = 1, \dots, n$

$$s_i = \frac{m_i}{n!} \quad (3.1)$$

où m_i signifie le nombre d'arrangements des composants pour les quelles la $i^{\text{ème}}$ panne cause la panne du système.

Exemple 11 soit la fonction de structure suivante :

$$\phi(x) = \min(x_1, \max(x_2, x_3)) = x_1(x_2 \coprod x_3) = x_1(x_2 + x_3 - x_2x_3)$$

Permutations des composants	Les Statistiques d'ordre
$X_1 < X_2 < X_3$	$X_{1:3}$
$X_1 < X_3 < X_2$	$X_{1:3}$
$X_2 < X_1 < X_3$	$X_{2:3}$
$X_2 < X_3 < X_1$	$X_{2:3}$
$X_3 < X_1 < X_2$	$X_{2:3}$
$X_3 < X_2 < X_1$	$X_{2:3}$

- Il sensuit que ce système a un vecteur de signature $s = (s_1, s_2, s_3)$ avec

$$\begin{cases} s_1 = P(T_s = X_{1:3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ s_2 = P(T_s = X_{2:3}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ s_3 = P(T_s = X_{3:3}) = \frac{0}{6} = 0 \end{cases}$$

Remarque 17

Il est facile de montrer que les cinq systèmes cohérents distincts d'ordre 3 ont les signatures $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$, $(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Les trois premières de ces signatures

correspondent aux systèmes "i – sur – 3 : F" pour $i = 1, 2, 3$, et la cinquième correspond au système dans lequel un composant est en parallèle avec un système en série d'ordre 2. Alors que l'analyse combinatoire impliquée dans le calcul des signatures des systèmes d'un ordre donné peut être assez complexe.

Formule 2 : - Pour un système cohérent à durée de vie T , définissons le vecteur $\alpha(n) = (\alpha_1(n), \alpha_2(n), \dots, \alpha_n(n))$, tel que :

$$\alpha_i(n) = \frac{r_i(n)}{\binom{n}{i}} \quad (3.2)$$

où $r_i(n)$ désigne le nombre des liens de taille i pour $i = 1, 2, \dots, n$ avec $\alpha_0(n) = 0$ (par convention).

En calculant les $r_i(n)$, S.Eryilmaz [15] a donné la formule de la signature d'un système cohérent de la manière suivante :

Pour $i = 1, 2, \dots, n$

$$s_i = \alpha_{n-i+1}(n) - \alpha_{n-i}(n) \quad (3.3)$$

de (3.2) et (3.3) on obtient :

$$r_i(n) = \binom{n}{i} \alpha_i(n) = \binom{n}{i} \sum_{j=n-i+1}^n s_j \quad (3.4)$$

- Pour tout système cohérent, la proportion $\alpha_i(n)$ est une fonction croissante en i .

Exemple 12 Pour une illustration, considérons le système avec fonction de structure :

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min(x_1, \max(x_2, x_3, x_4)).$$

Les liens de cette structure sont : $L_1 = \{1, 2\}$, $L_2 = \{1, 3\}$, $L_3 = \{1, 4\}$, $L_4 = \{1, 2, 3\}$, $L_5 = \{1, 2, 4\}$, $L_6 = \{1, 3, 4\}$, $L_7 = \{1, 2, 3, 4\}$. Ainsi $r_1(n) = 0$, $r_2(n) = 3$, $r_3(n) = 3$, $r_4(n) = 1$, et d'après (3.3) on obtient

$$\alpha_1(n) = 0, \quad \alpha_2(n) = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3(n) = \frac{3}{4}, \quad \alpha_4(n) = 1$$

et donc d'après (3.4) la signature du système est le vecteur $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ où

$$\begin{cases} s_1 = \alpha_4(n) - \alpha_3(n) = \frac{1}{4} \\ s_2 = \alpha_3(n) - \alpha_2(n) = \frac{1}{4} \\ s_3 = \alpha_2(n) - \alpha_1(n) = \frac{1}{2} \\ s_4 = \alpha_1(n) - \alpha_0(n) = 0 \end{cases}$$

Formule 3 : - Boland(2001) a montré que s_i peut être explicitement écrit sous la forme suivante :