السلسلة 3 في ميكانيك النقطة المادية

التمرين1:

تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية التالية:

$$X(t) = -6t^2 + 16t$$

1/ ما موضع هذا الجسم عند t =1s؟

2/ في أي لحظة t يمر بالموضع O (نقطة المبدأ).

3/ ما هي السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية بين 0 s و 2 s.

4/ أعط عبارة السرعة اللحظية، واستنتج قيمتها عند t=0s.

5/ما هو التسارع المتوسط في الفترة الزمنية بين 0 s و 2 s.

6/أعط عبارة التسارع اللحظي.

التمرين2:

نعرف نقطة مادية Mفي المرجع $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ في اللحظة t بالاحداثيات التالية :

$$y(t) = 2t \quad و \quad X(t) = t^2 - 1$$

1.اعط معادلة المسار للنقطة M.

2.اعط عبارة السرعة للنقطة M.

3.اعط عبارة التسارع للنقطة M .

4.ما هي طبيعة الحركة .علل ؟

التمرين 3:

ليكن في مستوي (P)معلم متعامد متجانسXOY و متحرك ينتقل في هذا المستوي.في اللحظة t إحداثيات المتحرك هي:

$$x = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2} \qquad y = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}$$

1/ ما هو مسار المتحرك.

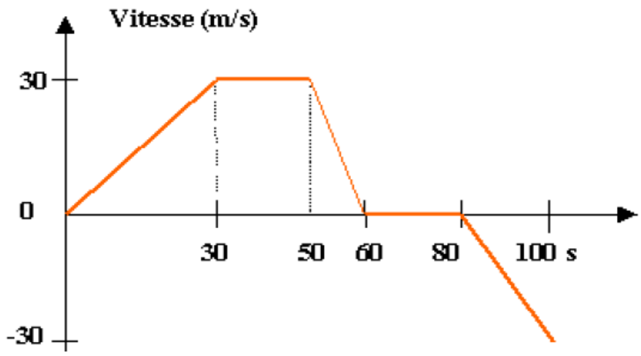
2/ احسب في اللحظة t إحداثيات شعاع السرعة $\vec{v}$ و التسارع $\vec{a}$ للمتحرك. ما هي العلاقة الموجودة بين$\overrightarrow{OM}$ و $\vec{a}$؟

التمرين 4:

سيارة تتحرك انطلاقا من $x_0=0$ على مسار مستقيم. الشكل الموالي يبين مخططات السرعة خلال زمن الحركة.

1/ خلال المجالات الزمنية الخمسة أعط القيمة الجبرية للتسارع و الانتقال.

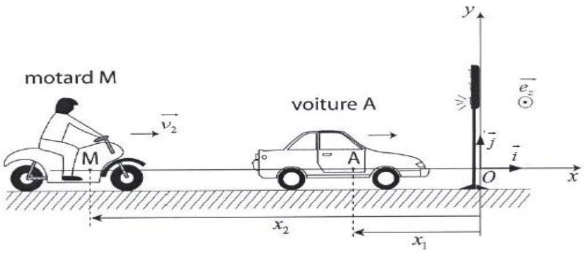
2/ اوجد في نهاية الحركة عند الزمن t =100s الموضع النهائي للمتحرك و المسار المتبع بالقيمة المطلقة.



التمرين5 :

سيارة Aتوقفت على طريق أفقي مستقيم على مسافةd_1=3m من الضوء الأحمر. عندما يتحول الضوء إلى الأخضر في اللحظة t =0 السيارة تنطلق بتسارع ثابت $a=3m/s^2$. في نفس الوقت ينطلق دراج بسرعة ثابتة v_2=54km/h يوجد على مسافة d_2=24m من السيارة.

نعتبر السيارة و الدراج كنقاط مادية يعبر عنها بأشعة الموضع $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{\imath}$ و $\overrightarrow{OM} = x_2\vec{\imath}$ على الترتيب . نختار كمبدأ للمعلم عمود الإشارة الضوئية.



1/ اوجد المعادلات الزمنية $x_1(t)$ و $x_2(t)$ للسيارة و الدراج على الترتيب.
2/ اوجد أزمنة العبور و كذلك مواضع السيارة و الدراج في هذه الازمنة.
3/ اذا كان الدراج يسير بسرعة v_2=36km/h هل يستطيع اللحاق بالسيارة.

التمرين6 :
ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس xoy مبدآه O و قاعدته $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
تتغير الاحداثيتان x و y لنقطة مادية M في المستوي $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مع الزمن حسب القانون:

$$x = 2\sin\frac{t}{2} \qquad\qquad y = 2\cos\frac{t}{2}$$

/ حدد طبيعة المسار.
2/ حدد مركبتي شعاع السرعة $\vec{v}$ و التسارع للمتحرك
3/ حدد عبارة السرعة $\frac{ds}{dt}$ و كذا عبارة الفاصلة المنحنية S(t) بأخذ الشرط الابتدائي s=0 لما t=0.
4/ حدد المركبتين الناظمية و المماسية للتسارع.
5/ استنتج نصف قطر الانحناء.

Corrigé type

1Solution ex

- la position de corps à$t = 1s$: $x(1) = 10$
- $x = 0 \Rightarrow 6t^2 + 16t = 0$ il passe par l'origine à $t = 0s$ et $t = \frac{8}{3} = 2.7s$
- $v_{moy} = \frac{x(t=2)-x(t=0)}{2-0} = 4m/s$
- $\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} = 16 - 12t; v(0) = 16m/s$
- $a_{moy} = \frac{v(t=2)-v(t=0)}{2-0} = -12m/s^2$
- $a = \frac{dv}{dt} = -12$

- **حل التمرين 2**
- 1. تكون نقطة مادية M ذات إحداثيات :

- $X(t) = t^2 - 1$ ....(1)
- $y(t) = 2t$ ... ... (2)

- معادلة مسار M في R

- $(1) \rightarrow t = \sqrt{x(t)+1}$ بالمعادلة$\rightarrow$ $y(t) = 2\sqrt{x(t)+1}$.

- 2. التعبير عن سرعة النقطة M:

- $\vec{v} = \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} t2 = \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases}$

- سرعة: $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} = 2t\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$
- 3. التعبير عن تسارع النقطة M:

- $\vec{a} = \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases}$

- التسارع $\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} = 2\vec{\imath}$
- طويلتي شعاع السرعة و التسارع هما:
- $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(2t)^2 + (2)^2} = \sqrt{4(1+t^2)}$
- $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{(2)^2 + (0)^2} = 2m/s^2$

حل التمرين 3

1/ للحصول على مسار الحركة نحذف الزمن ما بين المعادلتين الزمنيتين:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{t}{2} &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \sin\frac{t}{2} &= \frac{y}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1}$$

هو **قطع ناقص.**

2/ نشتق المعادلتين الزمنيتين بالنسبة للزمن فنحصل على مركبتي شعاع السرعة:

$$\vec{v}_x = \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\vec{v}_y = \dot{y} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$$

نشتق الآن السرعة بالنسبة للزمن فنحصل على مركبتي شعاع التسارع:

$$\vec{a}_x = \dot{v}_x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{t}{2}$$

$$\vec{a}_y = \dot{v}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

نكتب الآن العبارة الشعاعية للتسارع لنجد

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}x.\vec{i} - -\frac{1}{4}y.\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{4}(x.\vec{i} - y.\vec{j}) \quad ; \quad \boxed{\vec{a} = -\frac{1}{4}\overline{OM}}$$

$a = \frac{\sqrt{5}}{4}$/ 3

$$a^2 = \frac{2}{16}cos^2\frac{t}{2} + \frac{2}{4}sin^2\frac{t}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow 2cos^2\frac{t}{2} + 8sin^2\frac{t}{2} = 5$$

$$2\left(1 - sin^2\frac{t}{2}\right) + 8sin^2\frac{t}{2} = 5 \Rightarrow 6sin^2\frac{t}{2} = 3 \Rightarrow sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{t}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad t > 0; \quad \frac{t}{2} = \left| \begin{aligned} &+\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &+\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right.$$

حل التمرين 4

1. القيمة الجبرية للتسارع والإزاحة خلال الفترات الزمنية الخمس:

1) $0 < t < 30$ s, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1$ m/s^2, $v = at + v_0$

A t=0 s, v=0 m/s $\Rightarrow v_0 = 0$. Donc : $v = t$. Le mouvement est uniformiment accéléré.

2) $30 < t < 50$ s, $a = 0$ m/s^2, $v = 30$ m/s. Le mouvement est uniforme.

3) $50 < t < 60$ s, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3 m/s^2$, $v = at + v_0$

A t=0 s, $v = 30$ m/s $\Rightarrow v_0 = 30$. Donc : $v = -3t + 30$. Le mouvement est uniformiment retardé.

4) $60 < t < 80$ s, a=0 m/s^2, $v = 0$ m/s. Le mobile est au repos.

5) $80 < t < 100$ s, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-3}{2}$ m/s^2, $v = at + v_0$

A t=0 s, v=0 m/s $\Rightarrow v_0 = 0$. Donc : $v = \frac{-3}{2}t$. Le mouvement est uniformiment accéléré.

$0<t<30s$	$30<t<50s$	$50<t<60s$	$60<t<80$	$80<t<100$
$a_1=1m/s^2$	$a_2=0$	$a_3=-3m/s^2$	$a_4=0$	$a_5=-1,5m/s^2$
$\Delta x_1=450m$	$\Delta x_2=600m$	$\Delta x_3=150m$	$\Delta x_4=0$	$\Delta x_5=-300m$

2. موضع x النهائي

abscisse finale : $x=x_0+\sum \Delta x_i = 900m$; *chemin parcouru :* $l= \sum|\Delta x_i| = 1500m$

.1 حل التمرين 5

1. Pour la voiture : $x_1(t) = \frac{a_1}{2}t^2 + d_1 = \frac{3}{2}t^2 - 3$

   Pour la moto : $x_2(t) = v_2 t + d_2 = 15t - 24$
2. Il y a dépassement si : $x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow \frac{3}{2}t^2 - 3 = 15t - 24 \Rightarrow \frac{3}{2}t^2 - 15t + 21 = 0$

   En résolvant cette équation : $\begin{cases} t_1 = 1,68\ s & x = 1,2m \\ t_2 = 8,32\ s & x' = 100,8\ m \end{cases}$
3. Si $v_2 = 36Km/h = 10m/s \Rightarrow x_2(t) = 10t - 24$, il y a dépassement si : $x_1(t) = x_2(t)$ ce qui revient à résoudre l'équation :

   $\frac{3}{2}t^2 - 10t + 21 = 0$ qui n'a pas de solution car Δ est négatif donc ils ne vont pas se rencontrer.
4. Détermination de la distance minimale :
   - $\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{3}{2}t^2 - 10t + 21 = 0$, est minimale si sa dérivée est nulle :

   $$\Delta x' = 3t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{10}{3} s$$

   - $\Delta x_{min} = 4.33m$

حل التمرين 6

1/ بحذف الزمن مابين المعادلتين الوسيطيتين ،و ذلك بتربيعهما و جمعهما ، نحصل على معادلة المسار $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$. المسار المتبّع من قبل المتحرّك هو **دائرة مركزها** O **و نصف قطرها** $R = 2$

2/ مركبتا شعاع السرعة:

$$v_x = -\sin\frac{t}{2} \;,\; v_y = \cos\frac{t}{2} \;;\; v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Leftrightarrow v^2 = 1 \;,\; \boxed{v = \frac{ds}{dt} = 1ms^{-1}}$$

3/ تكامل السرعة $v = \dfrac{ds}{dt}$ تعطينا المعادلة الزمنية بالإحداثيات المنحنية:

$$s = \int v.dt \Rightarrow v = t + C$$

و بما أن في $t = 0$ ، $s = 0$ فإن $C = 0$ و المعادلة الزمنية هي: $\boxed{s = t}$

4/ نشتق السرعة بالنسبة للزمن لنحصل على التسارع:

$$a_x = -\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2} \;;\; a_y = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} \;;\; \boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2 = 0,25ms^{-2}}$$

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = 0} \;,\; a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} \Rightarrow \boxed{a_N = 0,5ms^{-2}}$$

5/ نصف قطر الانحناء: $R = \dfrac{v^2}{a_N} \Rightarrow \boxed{R = 2m}$