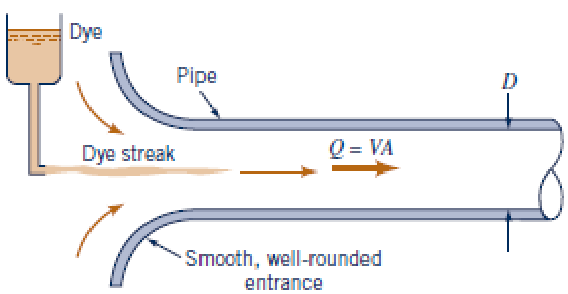
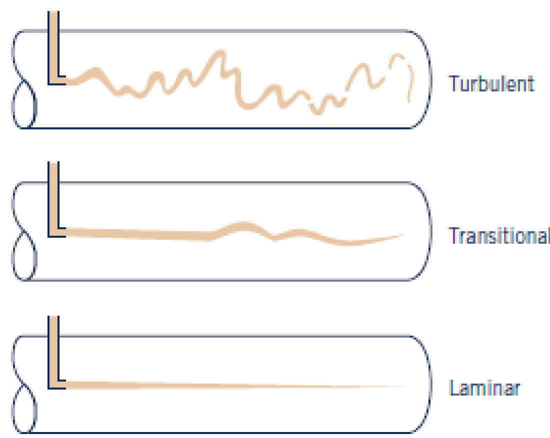
Chapter 4: Dynamics of real incompressible fluids in circular pipes

1. Flow regimes and Reynolds experiment

There are two flow regimes for fluids: Laminar and turbulent. In the first regime, the fluid flows in lamellae, which slide over each other; the streamlines are well-defined. On the other hand, in the turbulent regime, the streamlines mix, giving chaotic shapes. Osborne Reynolds (1842-1912) was the first to distinguish the difference between these two flow regimes. It uses a flow of water in a circular pipe of diameter D with a velocity V. Reynolds injects a neutral stream of dye into the water; for low velocities, the thread remains very distinct with a slight thickening due to the diffusion of the dye in the water. For greater flow (higher speed), the dye stream fluctuates in time and space with intermittent and irregular breaks along the pipe. The thread quickly becomes indistinct and randomly diffuses into the pipe for significant flow rates. These three phenomena are called regimes: laminar, transient, and turbulent.





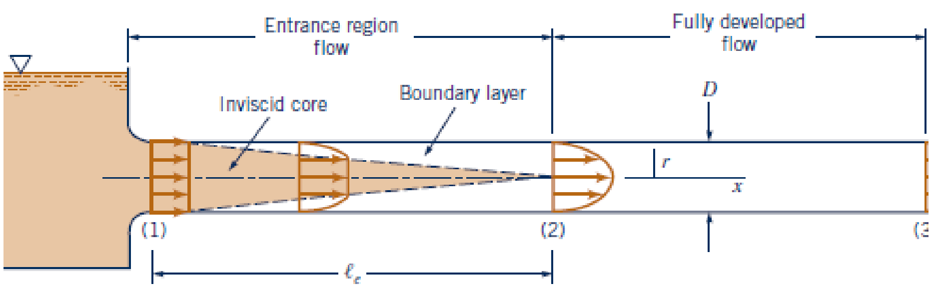
Turbulent fluctuations are the cause of the dispersion of the dye in the pipe. In laminar flow, the velocity has a single component $\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{u}\vec{\imath}$. For the turbulent one, the predominant direction is along the pipe accompanied by the components normal to the pipe $\vec{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{u}\vec{\imath} + \boldsymbol{v}\vec{\jmath} + \boldsymbol{w}\vec{\boldsymbol{k}}$. The important parameter that determines the flow regime in the pipe is called the "Reynolds number" $\boldsymbol{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}$ where V is the average speed in the pipe; thus, the flow is laminar if Re <2100, and it is turbulent if Re>4000 between the two; it is the transition.

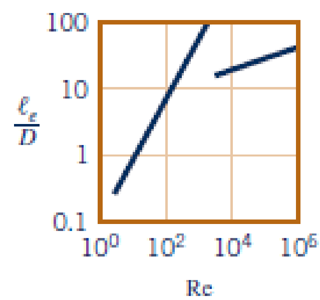
2. Entrance region and fully developed flow:

The “entrance region” of a pipe is the region where the fluid enters at an almost constant speed (section (1)). During its movement, the viscous effects form a layer near the wall called the “boundary layer”. In this layer, the speed decreases towards the wall until it is canceled out on the latter under the effect of viscosity. From a distance from the inlet, the velocity profile remains unchanged; the flow is said to be “fully developed”. And *le* is said the entrance region length.

For laminar flow, the entrance length is given by $\boldsymbol{l_e = 0.06DRe}$

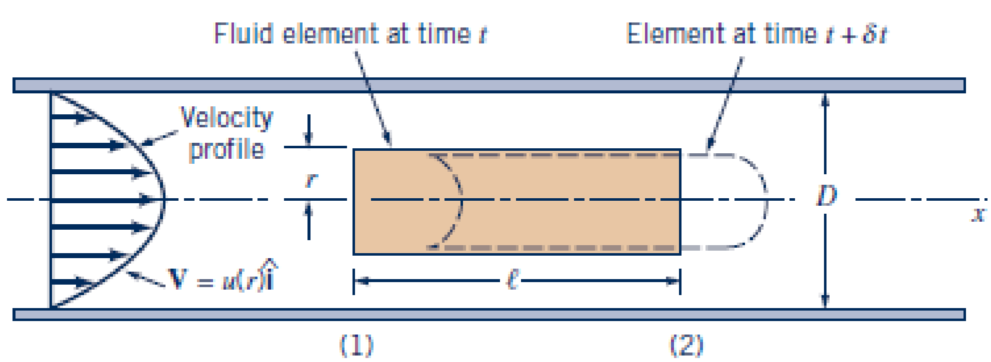
For turbulent flow, it is: $\boldsymbol{l_e = 4.4DRe^{\frac{1}{6}} l_e = 4.4DRe^{\frac{1}{6}}}$

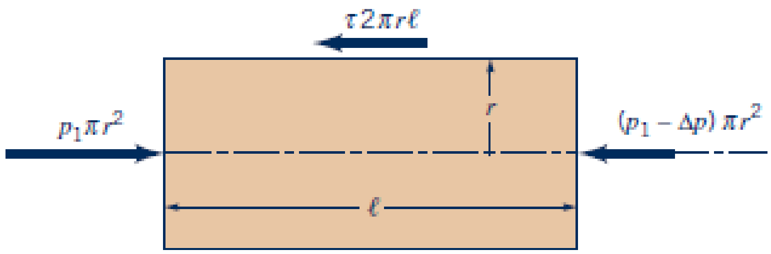




3. Linear pressure losses in pipes

In this part, we will calculate the pressure or height losses; the latter is due to friction between the fluid particles and the solid walls of the pipes. We will consider the fully developed flow in the pipes; then, we will calculate the pressure losses ΔP along the pipe caused by the friction between the fluid particles and the walls. To do this, let us take a cylindrical fluid element of length *l* and radius r centered at the horizontal x-axis in a pipe of diameter D.





We represent the cylinder at times *t* and *t+Δt*; the flow being developed then the velocity profile is constant, which means that the local acceleration is zero (*dv/dt=0*). If the effects of gravity are neglected (*g=0*), the pressure is constant in the cross sections and varies along the pipe from one section to another. Let us take two points (1) and (2); at point (1), $P=P_1$ at point (2), $P=P_2$. Since there is a loss of load (pressure) then $P_2= P_1- \Delta P$ with ΔP is the pressure drop between points (1) and (2) ($\Delta P >0$).

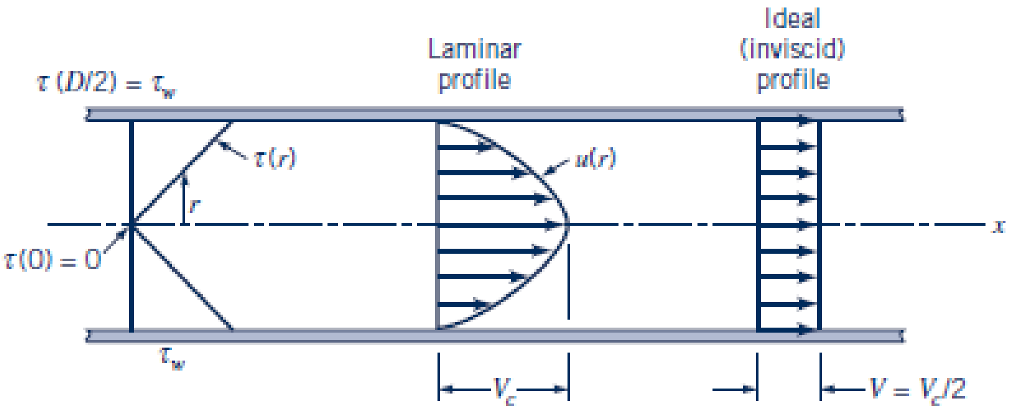
The viscous stress is a function of r, $\tau=\tau(r)$, let us apply Newton's second law F=ma to the cylinder in the x direction: $F_x=\Sigma m.a_x$ in this case $a_x=0$ (fully developed flow), we have therefore: : $p_1\pi r^2 - (p_1 - \Delta p)\pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0$ this gives $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$. Since $\frac{\Delta p}{l}$ do not depend on r, $\frac{2\tau}{r}$ must not also depend on it, i.e. τ must be equal to τ=cte.r. Let's apply the boundary conditions to calculate this constant.

At r=0, we have, τ=0 no friction, and at r=D/2 (on the wall of the pipe), the stress is maximum, it is noted τ_w, therefore, τ_w= cte.D/2 which gives cte=$2\tau_w/D$ and we obtain the constraint as a function of r: $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$ this constraint varies linearly as a function of r. If we replace τ in the relation $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$ we will get $\boldsymbol{\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}}$

This formula means that a moderate (small) value of τ_w can produce a significant pressure loss if the pipe is long enough l/D>>1.

4. Calculation of the velocity profile and flow according to the pressure loss

Consider a fully developed flow in a circular pipe, as shown in the figure.



We know that the friction stress in a Newtonian fluid is proportional to the speed gradient: $\boldsymbol{\tau = \mu \frac{du}{dr}}$ for our case $\boldsymbol{\tau = -\mu \frac{du}{dr}}$, the sign (-) is included to give τ>0 for du /dr < 0. By combining the equations: $\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r}$ and $\boldsymbol{\tau = -\mu \frac{du}{dr}}$ we will have $\boldsymbol{\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r}$.

The integration gives the velocity profile : $\boldsymbol{\int du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \int r dr}$ or $\boldsymbol{u(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu l} r^2 + c_1}$

c_1 is constant; to find it, we apply the boundary conditions.

At the wall of the pipe, the speed is zero. For $\boldsymbol{r = \frac{D}{2} \rightarrow u = 0 \rightarrow c_1 = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}}$

The velocity profile is therefore:

$$u(r) = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}\left[1 - \left(\frac{2r}{D}\right)^2\right] = V_a\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

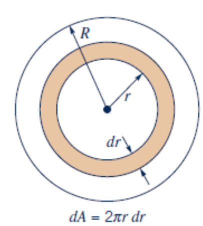
We note $\boldsymbol{V_a = \frac{\Delta p D^2}{16\mu l}}$, the velocity on the axis of the pipe and R=D/2 its radius.

Another alternative expression can be found using the relation $\Delta p = 4\frac{l\tau_w}{D}$:

$$\boldsymbol{u(r) = \frac{\tau_w D}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

The volume flow rate through the pipe is calculated by:

$\boldsymbol{\dot{Q} = \int u(r) d A = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = 2\pi V_a \int_0^R u\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr = \frac{\pi R^2 V_a}{2}}$



By definition, the average velocity is the flow rate divided by the cross-section:

$$\boldsymbol{V_m = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{V_a}{2} = \frac{\Delta p D^2}{32\mu l}}$$

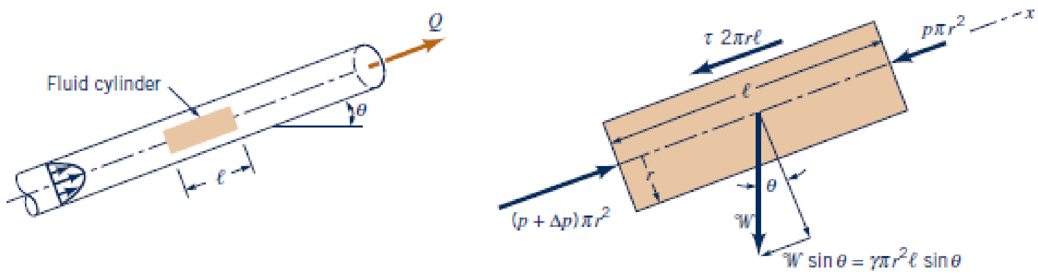
The volume flow rate is therefore:

$$\boldsymbol{\dot{Q} = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128\mu l}}$$ which is called the Poiseuille relation.

This relationship shows that for laminar flow in a horizontal pipe, the flow rate is directly proportional to the pressure drop ΔP and the diameter D of the pipe and inversely proportional to the viscosity μ and the length of the pipe l.

5. Case of an inclined pipe

The inclined pipes will be extended by taking an inclined pipe with the angle θ relative to the horizontal.



The forces applied to the cylindrical element are:

$$(p + \Delta p)\pi r^2 - p\pi r^2 - 2\pi r l \tau - \rho g \pi r^2 l \sin\theta = 0$$
$$\Delta p r - 2l\tau - \rho g r l \sin\theta = 0 \rightarrow \frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$$

Therefore, all the results of the horizontal pipe are valid, provided that ΔP will be replaced by

$\Delta p - \rho g l \sin\theta$, from which the average speed will be:

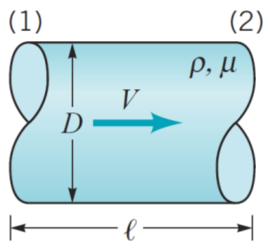
$$V_m = \frac{(\Delta p - \rho g l \sin\theta) D^2}{32\mu l}$$

And the volume flow rate: $\dot{Q} = \frac{\pi D^4 (\Delta p - \rho g l \sin\theta)}{128\mu l}$

4. تحليل الوحدات أو الأبعاد

الغرض من تحليل الأبعاد أو الوحدات هو تحديد وتقليل المتغيرات التي تؤثر على ظاهرة فيزيائية. نأخذ على سبيل المثال حالة القناة ونبحث عن انخفاض الضغط عن طريق تحليل الأبعاد.

ليكن التدفق المستقر غير القابل للضغط لسائل نيوتني ذو لزوجة μ وكتلة حجمية ρ يسيل بسرعة v عبر أنبوب أملس بطول l وقطر D. نريد إيجاد انخفاض الضغط ΔP في الأنبوب بدلالة متغيرات التدفق الأخرى. للقيام بذلك نستخدم نظرية باكنغهام-Buckingham -أو نظرية π.



$\Delta p_{\ell} = (p_1 - p_2)/\ell$

<u>نظرية باكنغهام بي (π).</u>

تنص النظرية على أنه "إذا كانت المعادلة التي تتطلب k متغيرات متجانسة الأبعاد، فيمكن اختزالها إلى علاقة k - r حدود لا أبعاد لها، حيث r هو الحد الأدنى لعدد الأبعاد اللازمة لوصف جميع المتغيرات". يتم الإشارة إلى الحدود بعبارة "الحدود π_i".

لتكن معادلة فيزيائية بعدد k من متغيرات، نكتب:

$$\boldsymbol{u_1 = f(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k)}$$

وفقًا لنظرية Pi ، يمكن إعادة صياغة المعادلة على النحو التالي:

$$\pi_1 = \phi(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-r})$$

مع ϕ دالة لكل من $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{k-r}$ ، يتم ايجاد الحدود π_i في الخطوات التالية:

<u>الخطوة 1:</u> كتابة كل المتغيرات المؤثرة في الظاهرة الفيزيائية. يشترط ان تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض، أي انه لا يمكن اخذ متغيرين مشتقين من بعضهما مثل الثقل الحجمي والكتلة الحجمية، في الحالة المدروسة لدينا:

μ ، ρ، v ، D و نبحث عن ΔP_l.

<u>الخطوة 2:</u> نختار نظام الوحدات الذي سنستخدمه. يوجد نظام القوة، الطول و الزمن FLT أو الكتلة، الطول و الزمن MLT. بعدها نكتب وحدات المتغيرات التي احصيناها في الخطوة الأولى في النظام المختار. في حالتنا نختارMLT و نكتب الوحدات لكل متغير، لدينا:

$\Delta P_l \equiv \frac{kg}{m^2 s^2}$ $= M^1 L^{-2} T^{-2}$	$D \equiv m$ $= L^1$	$v \equiv \frac{m}{s}$ $= L^1 T^{-1}$	$\rho \equiv \frac{kg}{m^3}$ $= M^1 L^{-3}$	$\mu \equiv Pa\ s = \frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{ms}$ $= \frac{M}{LT} = M^1 L^{-1} T^{-1}$

عدد الحدود π_i يساوي k-r ، مع k عدد المتغيرات (الخطوة 1) و r عدد الأبعاد اللازمة للتعبير عن الحدود π_i (الخطوة 2). في حالتنا : k = 5 متغيرات في الخطوة الاولى و r = 3 وحدات مستعملة في الخطوة الثانية. اذا عدد الحدود يساوي k-r =5-3=2.

الخطوة 4: نحدد عددًا من المتغيرات المتكررة، ويجب ألا تحتوي هذه المتغيرات على المتغير التابع الذي سيكون موضوع الدراسة ΔP. كما انها يجب ان تحتوي على اكبر عدد ممكن من الوحدات و يكون شكلها بسيط قدر الإمكان. في حالتنا نختار ρ ، V و D.

الخطوة 5: نقوم بتشكيل الحدود π_i بضرب المتغيرات غير المتكررة بجداء المتغيرات المتكررة المرفوعة إلى قوة تجعل المجموعة بلا أبعاد. يكون لكل حد π_i الشكل$u_i(u_1^a u_2^b u_3^c \ldots)$ حيث تكون u_i متغيرًا غير متكرر ؛ u_1 و u_2 و u_3 هي المتغيرات المتكررة ويتم تحديد الأسس a و b و c على أنها تركيبة بلا أبعاد. في حالتنا، فإن الحدود π_i هي:

$$\pi_1 = D^a V^b \rho^c \Delta P_l$$

نعوض الوحدات المكتوبة في الخطوة 2 و نساويها للحد الذي ليس له وحدة :

$$M^0 L^0 T^0 = L^a (L^1 T^{-1})^b (M^1 L^{-3})^c (M^1 L^{-2} T^{-2})$$

نبحث عن قيم الأسس a و b و c بالنسبة للطول L لدينا : $a + b - 3c - 2 = 0$ ، الزمن T لدينا : $-b - 2 = 0$ و أخيرا الكتلة M نحصل على : $c + 1 = 0$. حل هذه لمعادلات يعطي : $c = -1$، $b = -2$ و $a = 1$. عندما نعوض الأسس في معادلة الحد الأول نجد :

$$\pi_1 = D^1 V^{-2} \rho^{-1} \Delta P = \frac{D \Delta P_l}{\rho V^2}$$

نلاحظ ان هذا الحد ليس له و حدة.

نكمل بنفس الطريقة حتى ننهي جميع المتغيرات الغير متكررة.

$$\pi_2 = D^a V^b \rho^c \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = L^a (L^1 T^{-1})^b (M^1 L^{-3})^c \left(M^1 L^{-1} T^{-1}\right)$$

$$a + b - 3c - 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

$$-b - 1 = 0 \rightarrow b = -1$$

$$c + 1 = 0 \rightarrow c = -1$$

ما يعطي:

$$\pi_2 = D^{-1} V^{-1} \rho^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{1}{Re}$$

الخطوة 6: التحقق من أن الحدود المحسوبة بلا أبعاد.

$$\pi_1 = \frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} \equiv \frac{m\dfrac{kg\frac{m}{s^2}}{m\,m^2}}{\dfrac{kg}{m^3}\dfrac{m^2}{s^2}} = 1 \qquad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{\dfrac{kg\frac{m}{s^2}}{m^2}s}{\dfrac{kg}{m^3}\dfrac{m}{s}m} = 1$$

الخطوة 7: تشكيل العبارة:

$$\pi_1 = \phi(\pi_2) \leftrightarrow \frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right) = \phi_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) = \phi_1(Re)$$

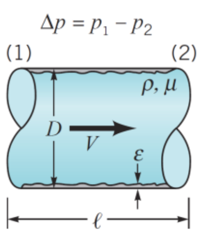
مما يبين أن خسارة الضغط الخطي له علاقة بعدد رينولدس، تبقى الدالة ϕ أو ϕ_1 مجهولة حيث يجب حسابها. لقد اثبتت التجربة أنه في حالة الجريان الصفائحي: $\frac{D\Delta P_l}{\rho V^2} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}\frac{1}{2}\left(\frac{D}{l}\right) = \frac{32}{Re}$

أي أنه $\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{64}{Re}\left(\frac{l}{D}\right) = f\left(\frac{l}{D}\right)$ ،

يسمى f معامل الاحتكاك الخطي في السريان الصفائحي $f = \frac{64}{Re}$. في هذه الحالة الدالة ϕ ثابتة وهي عبارة عن $\phi = 128\left(\frac{l}{D}\right)$

نلاحظ هنا انه تمكنا من اختصار خمس متغيرات الى متغيرين وهذا ما يوفر الجهد في التجارب او الحساب.

خسارة الضغط الخطية ـفي القنوات الخشنة.



لتكن قناة تنقل مائعا، إذا كان الجريان متطور فان الخسارة في الضغط متعلقة ب:

$$\Delta p = F(\rho, \mathrm{v}, D, \mu, l, \varepsilon)$$

ε هي خشونة السطح الداخلي للقناة، الجدول التالي يعرض خشونة بعض الاسطح.

Equivalent Roughness for New Pipes [Adapted from Moody (Ref. 7) and Colebrook (Ref. 8)]

Pipe	Equivalent Roughness, ε Feet	Equivalent Roughness, ε Millimeters
Riveted steel	0.003–0.03	0.9–9.0
Concrete	0.001–0.01	0.3–3.0
Wood stave	0.0006–0.003	0.18–0.9
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Commercial steel or wrought iron	0.00015	0.045
Drawn tubing	0.000005	0.0015
Plastic, glass	0.0 (smooth)	0.0 (smooth)

مادة القناة	الخشونة (ε mm)
حديد صلب مبرشم	9.0-0.9
أسمنت	3.0-0.3
الخشب المصقول	0.9-0.18
حديد الزهر	0.26
الحديد المجلفن	0.15
الصلب التجاري	0.045
انابيب مسحوبة	0.0015
بلاستيك أو زجاج	0 املس

نريد ان نجد بطريقة تحليل الوحدات العبارة التالية:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}} = F\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}\right)$$

5 . Energy equation for a flow in a pipe with pressure loss.

5.1 The first principle for a 1D flow is stationary and without external work.

The energy balance is written: $\Delta\dot{Q} + \Delta\dot{W} = \Delta\dot{E} = \Delta(\dot{m}e)$

Where $\dot{m}$ is the mass flow rate. In this case, heat loss is caused by friction; the only non-zero work is that of the pressure forces at the entrance and exit of the control volume. The net power lost as heat is: $\Delta\dot{Q} = \dot{Q}_s - \dot{Q}_e = \dot{Q}_{net}$

The power developed in the form of work is equal to:

$\Delta\dot{W} = -\Delta(pvs) = -[(pvs)_s - (pvs)_e]$, v is the velocity of the flow.

If we apply the first law equation to the control volume shown in the figure, we find:

$$\dot{Q}_{net} - [(pvs)_s - (pvs)_e] = \Delta(\dot{m}e) = \left[\dot{m}\left(u + \frac{V^2}{2} + gz\right)\right]$$

with $\dot{m} = \rho v$s, (v velocity and u internal energy). Rearranging the terms gives:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = \left(\frac{p_s}{\rho_s} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s\right) - \left(\frac{p_e}{\rho_e} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e\right) \text{ with } \dot{Q}_{net} = \frac{\dot{q}_{net}}{\dot{m}}$$

If there is no friction, we must find the Bernoulli relation, then the term:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = 0$$

According to the second law of thermodynamics if there is friction, then Δs=ΔQ/T>0:

$$\dot{q}_{net} - (u_s - u_e) > 0 \quad \text{and} \quad \dot{q}_{net} - (u_s - u_e) = \text{friction losses}$$

In general, the energy equation for a stationary incompressible flow between two stations (1) and (2) is written:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

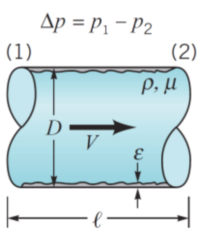
The factors α_1 and α_2 compensate for the velocity profile which is not uniform, if the latter is uniform $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. The height of losses is due to viscous losses. To find this height, let's compare the equation found with the equation:

$\frac{\Delta p - \rho g l \sin\theta}{l} = \frac{2\tau}{r}$ which is also written

$$\frac{\Delta p}{\rho g} - l \sin\theta = \frac{2\tau l}{\rho g r}$$

We note that $\Delta p = p_1 - p_2$, $z_2 - z_1 = l \sin\theta$ and $v_1 = v_2$ for constant section pipe. Also : $\tau = \frac{2\tau_w}{D} r$, which gives : $h_L = \frac{2\tau l}{\rho g r} = \frac{4 l \tau_w}{\rho g D}$.

خسارة الضغط الخطية -في القنوات-



لتكن قناة تنقل مائعا، إذا كان الجريان متطور فان الخسارة في الضغط متعلقة ب:

$$\Delta p = F(\rho, \mathrm{v}, D, \mu, l, \varepsilon)$$

ε هي خشونة السطح الداخلي للقناة، الجدول التالي يعرض خشونة بعض الاسطح.

Equivalent Roughness for New Pipes [Adapted from Moody (Ref. 7) and Colebrook (Ref. 8)]

	Equivalent Roughness, ε	
Pipe	Feet	Millimeters
Riveted steel	0.003–0.03	0.9–9.0
Concrete	0.001–0.01	0.3–3.0
Wood stave	0.0006–0.003	0.18–0.9
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Commercial steel or wrought iron	0.00015	0.045
Drawn tubing	0.000005	0.0015
Plastic, glass	0.0 (smooth)	0.0 (smooth)

مادة القناة	الخشونة (ε mm)
حديد صلب مبرشم	9.0-0.9
أسمنت	3.0-0.3
الخشب المصقول	0.9-0.18
حديد الزهر	0.26
الحديد المجلفن	0.15
الصلب التجاري	0.045
انابيب مسحوبة	0.0015
بلاستيك أو زجاج	0 املس

لقد وجدنا بطريقة تحليل الوحدات العبارة التالية:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}} = F\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}\right)$$

اثبتت التجربة ان الخسارة في الضغط تتناسب مع طول القناة، مما يبسط العبارة حيث يمكننا أن نكتب:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}} = \frac{l}{D} \phi\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{l}{D} \phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

تسمى العبارة $\frac{\Delta p D}{l \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}}$ معامل الاحتكاك ويرمز له f مما يجعلنا نكتب في حالة قناة افقية:

$$\Delta p = f \frac{l}{D} \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}$$

مع $f = \phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$.

بالنسبة للجريان الصفائحي المتطور تماما فان معامل الاحتكاك، كما تطرقنا اليه سابقا، يساوي:

$$f = \frac{64}{Re}$$

أما فيما يخص الجريان المضطرب فان معامل الاحتكاك أكثر تعقيدا حيث يتوقف على R_e و $\frac{\varepsilon}{D}$ عبر العلاقة :

$$f = \phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

ولا يمكن ايجاده الى حد الان الا من التجارب.

يمكن التعبير عن الخسارة في الضغط بالخسارة في الارتفاع كذلك، لإيجاد العلاقة ما بين الخسارة في الارتفاع و معامل الاحتكاك نكتب معادلة انحفاظ الطاقة:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\mathrm{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

h_L هي الخسارة في الارتفاع ما بين النقطتين 1 و 2 الناتج عن الخسارة في الضغط. اذا افترضنا ان القطر ثابتا والقناة افقية، فان السرعة ثابتة والارتفاعات متساوية مما يعطي:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h_L$$

وبما ان:

$$\Delta p = f \frac{l}{D} \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}$$

فان:

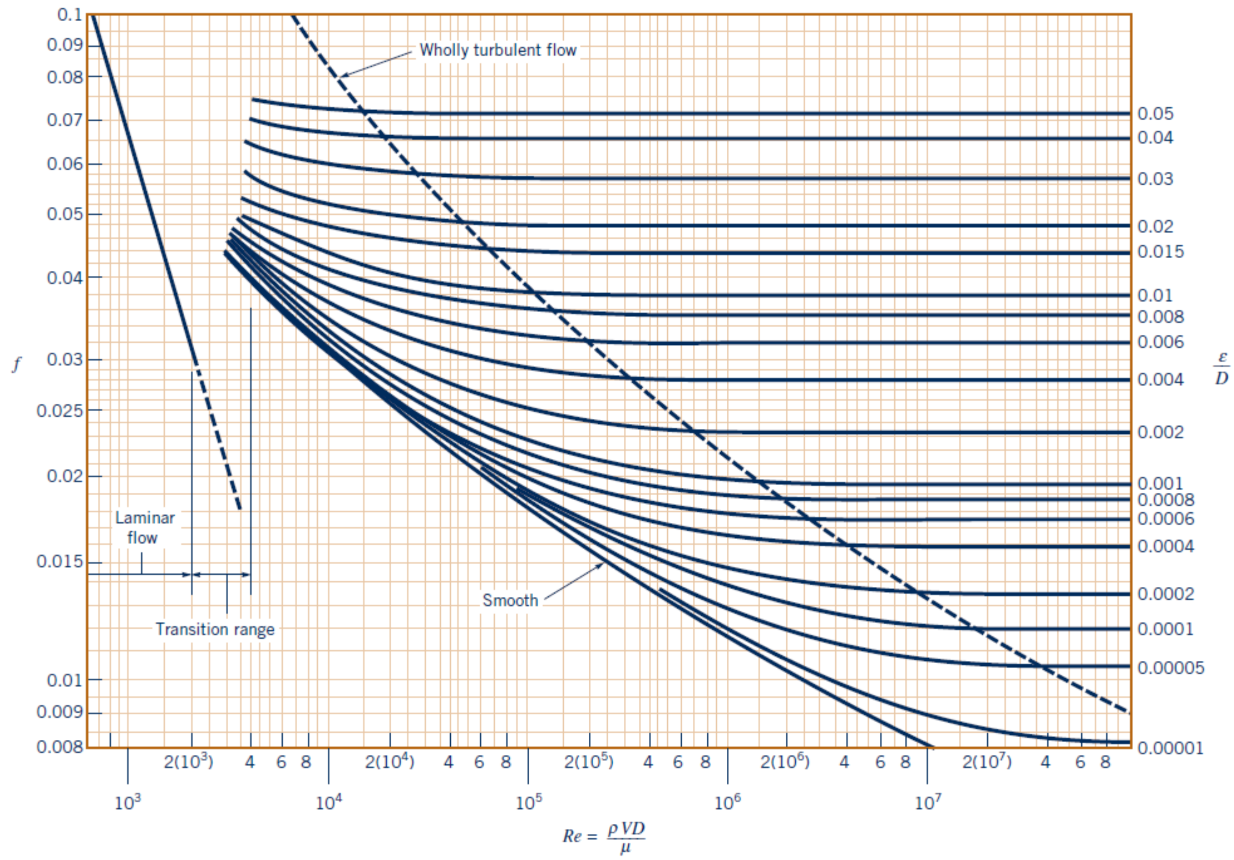
$$h_{Lf} = f \frac{l}{D} \frac{\mathrm{v}^2}{2g}$$

h_{Lf}هي خسارة الارتفاع الخطية الناتجة عن الاحتكاك. من هنا يمكننا كتابة معادلة دارسي وايزباخ *Darcy–Weisbach* التي تصلح فقط في حالة القطر الثابت للقناة:

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) + \rho g h_{Lf} = \rho g(z_2 - z_1) + f \frac{l}{D} \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}$$

خرائط ومعادلات حساب معامل الاحتكاك في القنوات:

ان معامل الاحتكاك f يتوقف على $R_e, \frac{\varepsilon}{D}$ كما رأينا من قبل، ويمكن ايجاده من التجارب التي أنتجت معادلات تقريبية وخرائط منها خريطة مودي $MOODY$. هذه الأخيرة تعطي معامل الاحتكاك تقريبيا بدلالة نمط الجريان والخصائص المتعلقة بالقناة والمائع. يتم حساب عدد رينولدس والخشونة النسبية ثم إيجاد نقطة التقاطع بينها التي يتم اسقاطها على المحور الايسر لإيجاد معامل الاحتكاك. بالنسبة للجريان المضطرب كليا ذو عدد رينولدس كبير جدا فإننا نستخدم المنحنى المتقطع على الخريطة، و في الأخير يوجد كذلك منحنى خاص بالأسطح الملساء.



هذه الخرائط لا تعطي المعامل بدقة كبيرة، حيث ان خطأ 10 بالمائة يعتبر مقبولا. للتقليل من الخطأ، يمكن إيجاد معامل الاحتكاك عن طريق الحساب باستخدام بعض العبارات الناتجة عن التجربة كمعادلة كولبروك $Colebrook$ التي تستخدم في حالة الجريان المضطرب والتي تكتب:

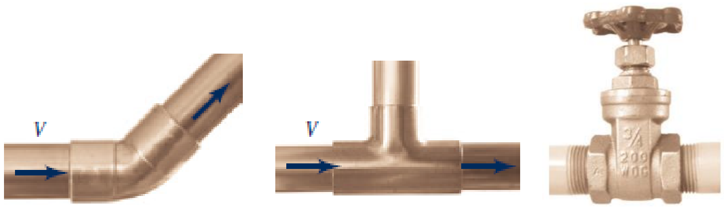
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \cdot log\left(\frac{\varepsilon/_D}{3.7} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{f}}\right)$$

من الملاحظ ان هذه العبارة تحتاج الى تطبيق طريقة عددية لحلها لان f معطى بدلالة f. هنالك عبارة أسهل من عبارة كولبروك، تسمى معادلة هالند $Haaland$ و التي تمكن من حساب معامل الاحتكاك للجريان المضطرب مباشرة، وهي :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \cdot log\left[\left(\frac{\varepsilon/_D}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{R_e}\right]$$

خسارة الضغط الخاصة:

ينشأ هدا النوع من خسارة الضغط عند مرور الموائع عبر الاكواع، الصمامات، التفرعات،...... نرمز لخسارة الضغط في هذه المعدات h_{Lmin} .



لحساب خسارة الضغط في هذه الحالة نستخدم العبارة:

$$\Delta p = K_L \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}$$

أو في حالة حساب الخسارة في الارتفاع:

$$h_{Lmin} = \frac{\Delta p}{\rho g} = K_L \frac{\mathrm{v}^2}{2g}$$

K_L هو معامل الخسارة في الضغط الخاص وهو يتوقف على شكل العتاد والسرعة المستخدمة، عموما فان K_L يعطى من طرف صانع العتاد.

في بعض الحالات تعطى الخسارة في الضغط بدلالة خسارة في الارتفاع l_{eq} مكافئة، في هذه الحالة نستخدم العبارة التالية للحساب:

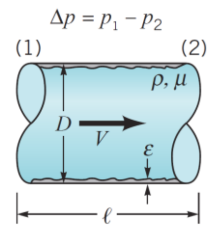
$$h_{Lmin} = K_L \frac{\mathrm{v}^2}{2g} = f \frac{l_{\acute{e}q}}{D} \frac{\mathrm{v}^2}{2g}$$

6. Linear or major pressure losses

Consider a circular pipe in which a fluid flows. If the flow is developed, the pressure drop is:

$$\Delta p = F(\rho, \mathrm{v}, D, \mu, l, \varepsilon)$$

With ε is the roughness of the internal surface of the pipe.



The dimensional analysis gives: $\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}} = F\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}\right)$

If we assume that the pressure drop is proportional to *l/D* we can write:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}} = \frac{l}{D}\phi'\left(\frac{\mu}{\rho \mathrm{v} D}, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{l}{D}\phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

The term $\frac{\Delta p}{\rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}}$ is called the friction coefficient *f*. So for horizontal pipe:

$\Delta p = f \frac{l}{D} \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}$ where $f = \phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$

For fully developed laminar flow $f = \frac{64}{Re}$ independently of ε/D. For turbulent flow $f = \phi\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right)$.

The energy equation is written:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\mathrm{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

With h_L is the linear pressure loss if the pipe is horizontal and the section is constant:

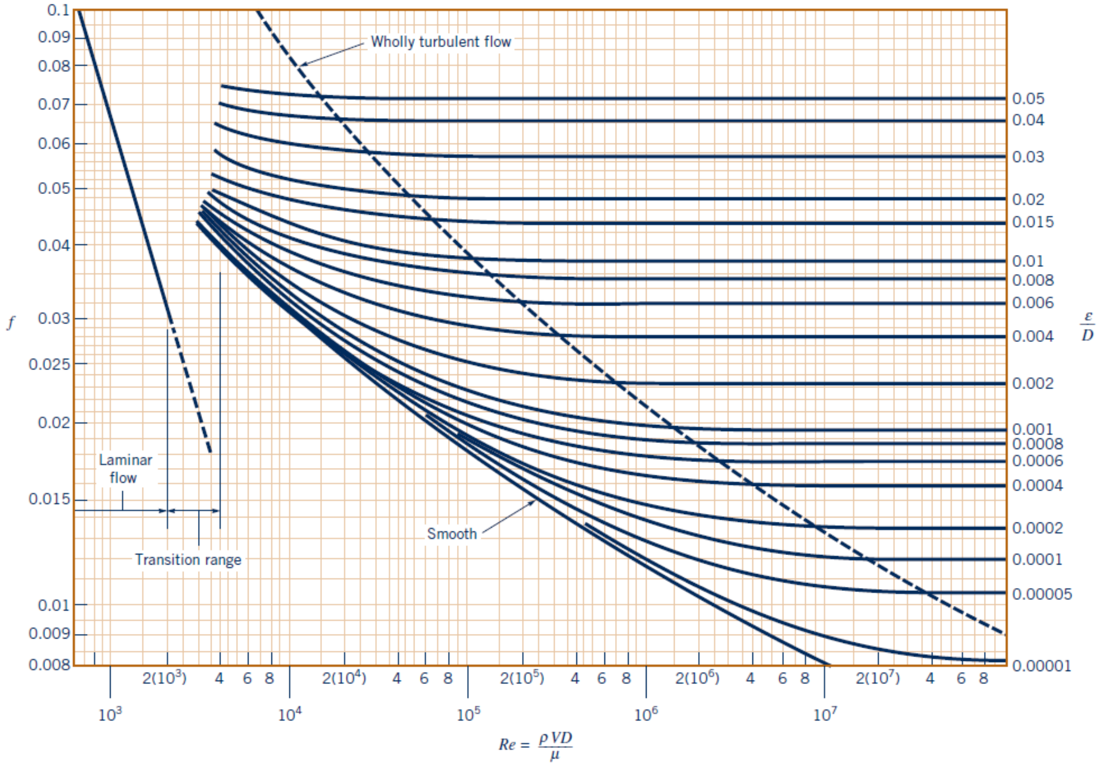
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h_L \quad \text{with} \quad h_L = f \frac{l}{D} \frac{\mathrm{v}^2}{2g}$$

Which gives $\quad p_1 - p_2 = \rho g (z_2 - z_1) + \rho g h_L = \rho g (z_2 - z_1) + f \frac{l}{D} \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2}$

The dependence of *f* on *Re* and *ε/D* is plotted on a so-called MOODY diagram where *f* is given as a function of *Re* and relative roughness *ε/D*.

These maps do not give the coefficient with high accuracy, as an error of 10 percent is considered acceptable. To reduce the error, the coefficient of friction can be found by calculation using some expressions resulting from the experiment, such as the Colebrook equation, which is used in the case of turbulent flow, which is written:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \cdot log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{f}}\right)$$



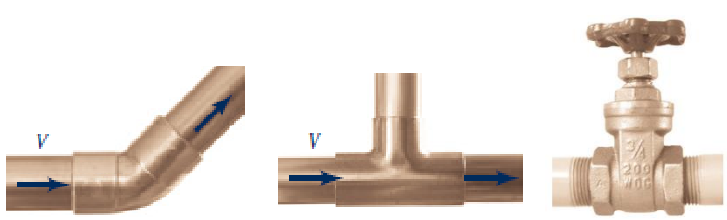
Moody Diagram

It is noted that this expression requires applying a numerical method to solve it because f is given in terms of *f*. There is a more straightforward expression than Colebrook's expression, called the Haaland equation, which enables the calculation of the coefficient of friction for turbulent flow directly, which is:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \cdot log\left[\left(\frac{\varepsilon/_D}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{R_e}\right]$$

7. Minor pressure losses

They are present when the fluid passes through the valves, elbows, tees, etc. The pressure loss in these organs is noted by h_{Lmin}.



To determine this pressure loss we specify a singular loss coefficient K_L, which is defined by :

$$K_L = \frac{h_{Lmin}}{\frac{\text{v}^2}{2g}} = \frac{\Delta p}{\rho \frac{\text{v}^2}{2}}$$

Such as $\Delta p = K_L \rho \frac{\text{v}^2}{2}$ or $h_{Lmin} = K_L \frac{\text{v}^2}{2g}$

In general, K_L depends on geometry and velocity; sometimes, minor losses are given

in terms of an equivalent length, l_{eq}, then: $h_{Lmin} = K_L \frac{\text{v}^2}{2g} = f \frac{l_{eq}}{D} \frac{\text{v}^2}{2g}$.

Detailed Dimensional Analysis Example

Dimensional (Unit) Analysis Including Roughness

The purpose of dimensional analysis is to identify and reduce the number of variables that govern a physical phenomenon, such as the pressure drop in a rough pipe.

Variables

For steady, incompressible flow of a Newtonian fluid in a pipe, the relevant variables are:

- μ (dynamic viscosity) $[M^1 L^{-1} T^{-1}]$
- ρ (density) $[M^1 L^{-3}]$
- v (velocity) $[L^1 T^{-1}]$
- D (diameter) $[L^1]$
- l (pipe length) $[L^1]$
- ε (absolute roughness) $[L^1]$
- ΔP (pressure drop) $[M^1 L^{-1} T^{-2}]$

Total variables: $k = 7$.

Buckingham Pi Theorem

We have $r = 3$ base dimensions (M, L, T), so the number of dimensionless groups is $k - r = 4$.

Choosing Repeating Variables

Select $r = 3$ repeating variables that together cover all fundamental units and omit the dependent variable (ΔP):

- ρ
- v
- D

Forming π Groups: Step-by-Step

Each π group has the form:

$$\pi = X \cdot \rho^a v^b D^c$$

where X is the non-repeating variable and a, b, c are found by solving equations based on dimensional consistency.

π_1: Pressure Drop ΔP

Set up the units:

$$[\Delta P][\rho]^a[v]^b[D]^c = (M^1L^{-1}T^{-2})(M^aL^{-3a})(L^bT^{-b})(L^c)$$

Combine exponents:

$$\begin{aligned} \text{Mass } (M)&: \quad 1 + a \\ \text{Length } (L)&: \quad -1 - 3a + b + c \\ \text{Time } (T)&: \quad -2 - b \end{aligned}$$

Set each to zero and solve:

$$\begin{aligned} 1 + a = 0 &\implies a = -1 \\ -2 - b = 0 &\implies b = -2 \\ \text{Plug into length:} \quad -1 - 3(-1) + (-2) + c = 0 \\ -1 + 3 - 2 + c = 0 &\implies c = 0 \end{aligned}$$

So:

$$\pi_1 = \Delta P \cdot \rho^{-1}v^{-2}D^0 = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$$

Optionally for presentation you can also write $\pi_1 = \frac{\Delta P D}{\rho v^2}$.

π_2: Viscosity μ

$$[\mu][\rho]^a[v]^b[D]^c = (M^1L^{-1}T^{-1})(M^aL^{-3a})(L^bT^{-b})(L^c)$$

$$\begin{aligned} 1 + a = 0 &\implies a = -1 \\ -1 - 3(-1) + b + c = 0 \implies -1 + 3 + b + c = 0 &\implies b + c = -2 \\ -1 - b = 0 &\implies b = -1 \implies c = -1 \end{aligned}$$

So:

$$\pi_2 = \mu\rho^{-1}v^{-1}D^{-1} = \frac{\mu}{\rho v D}$$

(Inverse Reynolds number.)

π_3: Pipe Length l

$$[l][\rho]^a[v]^b[D]^c = L^1 \cdot M^aL^{-3a}L^bT^{-b}L^c$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ 1 + 0 + 0 + c = 0 &\implies c = -1 \end{aligned}$$

So:

$$\pi_3 = \frac{l}{D}$$

π_4: Roughness ε

$$[\varepsilon][\rho]^a[v]^b[D]^c = L^1 \cdot M^aL^{-3a}L^bT^{-b}L^c$$

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ 1 + 0 + 0 + c = 0 &\implies c = -1 \end{aligned}$$

So:

$$\pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$$

Summary Table

Pi Term	Expression	Physical Meaning
π_1	$\frac{\Delta P}{\rho v^2}$	Pressure drop factor
π_2	$\frac{\mu}{\rho v D}$	Inverse Reynolds number
π_3	$\frac{l}{D}$	Pipe length ratio
π_4	$\frac{\varepsilon}{D}$	Relative roughness

Final Dimensionless Relationship

The general functional relationship:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho v D},\ \frac{l}{D},\ \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Or equivalently:

$$\text{Pressure drop factor} = f(Re,\ l/D,\ \varepsilon/D)$$

where $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$.

Practical Use Flow Regimes

- In **laminar flow**, ε/D has little effect and: $f \approx \frac{64}{Re}$
- In **turbulent flow**, roughness is significant and f depends on Re and ε/D (see Moody chart or Colebrook equation).

Conclusion

After full dimensional analysis with roughness, the pressure drop in a pipe is governed by Reynolds number, pipe length ratio, and relative roughness.