جامعة العربي بن مهيدي – أم البواقي-

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم الجذع المشترك

المستوى : سنة اولى

التخصص : الجذع المشترك

مقياس الرياضيات 1 (حل السلسلة 05)

التمرين الاول :

3) لدينا : $f(x)=-3x^3+5x^2-4$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-4x+k \ ; \ k\in\mathbb{R}$$

4) لدينا : $f(x)=x^4-x^3$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$F(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+k \ ; \ k\in\mathbb{R}$$

5) لدينا : $f(x)=\frac{4}{x^2}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}^*$

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و عليه

تقبل دوال أصلية F على كل منهما معرفة بالعبارة:

$$F(x)=\frac{-4}{x}+k; k\in\mathbb{R}.$$

8) لدينا : $f(x)=\cos 2x-\sin 3x$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

إذن : $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+k \ ; \ k\in\mathbb{R}$

9) لدينا : $f(x)=\sin x.\cos^3 x$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

إذن : $F(x)=\frac{1}{4}\cos^4 x+k \ ; \ k\in\mathbb{R}$

حل السلسلة 05

التمرين 02

1

a. $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$;

Correction : $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2x+2}{(x^2+2x)^3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u^3(x)}=\dfrac{1}{2}u'(x)u^{-3}(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{-2}\times(-2)u'(x)u^{-3}(x)$,

$u(x)=x^2+2x$, $n-1=-3$, $n=-2$, $F(x)=-\dfrac{1}{4}(x^2+2x)^{-2}=-\dfrac{1}{4(x^2+2x)^2}$.

b. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

Correction : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-1$, $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln u(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)+k$.

c. $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}+^*$.

Correction : $f(x)=x-1+\dfrac{\ln x}{x}=x-1+\dfrac{1}{x}\times\ln x=x-1+\dfrac{1}{2}\times 2u'(x)\times u(x)$ avec $u(x)=\ln x$,

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}u^2(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+k$.

التمرين 03

❶ تعيين α و β :

$$H'(x)=g(x)-1\Rightarrow \alpha e^{-x}-(\alpha x+\beta)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}+1-1$$
$$\Rightarrow(-\alpha x+\alpha-\beta)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}-\alpha=-1\\ \alpha-\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$$

ومنه:

$$H(x)=(x+2)e^{-x}$$

❷ استنتاج الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم عند القيمة 0:

نضع $\int g(x)dx=G(x)$

لدينا:

$$H'(x)=g(x)-1\Rightarrow\int H'(x)dx=\int(g(x)-1)\,dx$$
$$\Rightarrow H(x)=G(x)-x+c$$
$$\Rightarrow G(x)=(x+2)e^{-x}+x-c$$

لدينا: $G(0)=0$ ومنه:

$$G(0)=0\Rightarrow 2-c=0$$
$$\Rightarrow c=2$$

إذن: الدالة الأصلية للدالة g والتي تنعدم من أجل $x=0$ هي:

$$G(x)=(x+2)e^{-x}+x+2$$

التمرين04

a) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

b) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t dt = \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

c) **Vrai** : $\int_1^e \ln t dt = \left[t\ln t - t\right]_1^e = 1$.

d) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2-1=1$.

التمرين 05

a)

$$u'(t) = t \qquad u(t) = \frac{t^2}{2}$$
$$v(t) = \ln(t) \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$
$$I_1 = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2} dt$$

Donc

$$I_1 = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\, dt$$
$$u'(t) = \sin(t) \qquad u(t) = -\cos(t)$$
$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$
$$I_2 = [-t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt$$

Donc

$$I_2 = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\times\cos(0) + [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

-

التمرين 06

1.

$$\frac{2t^2}{t^2-1} = 2\frac{t^2-1+1}{t^2-1} = 2+\frac{2}{t^2-1} = 2+\frac{2}{(t-1)(t+1)} = 2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}$$
$$F(t) = \int\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2t+\ln|t-1|-\ln|t+1|+K$$

2.

$$t=\sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow t^2 = e^x+1 \Leftrightarrow e^x = t^2-1 \Leftrightarrow x = \ln(t^2-1)$$

Ce qui entraine que

$$dx = \frac{2t}{t^2-1}dt$$

Par conséquent

$$G(x) = \int t\times\frac{2t}{t^2-1}dt = 2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,dt = 2t+\ln|t-1|-\ln|t+1|+K$$
$$= 2\sqrt{e^x+1}+\ln\left|\sqrt{e^x+1}-1\right|-\ln\left|\sqrt{e^x+1}+1\right|+K$$