

Chapitre IV : Les Pertes De Précontraintes

I. Introduction

La contrainte de travail des aciers ne peut être déterminée de façon réglementaire comme en béton armé par exemple, où la contrainte admissible des aciers est limitée à une fraction de limite élastique.

En effet, certains phénomènes qui n'avaient pas d'action sur la contrainte de l'acier en béton armé, interviennent de façon non négligeable, tels :

- ☐ le frottement à la mise en tension des câbles.
- ☐ le recul à l'ancrage.
- ☐ la non-simultanéité de mise en tension des différents câbles.
- ☐ le retrait du béton.
- ☐ la relaxation des aciers.
- ☐ le fluage du béton.

Les trois premières pertes sont **instantanées**, les trois dernières sont des pertes **différées**, c'est-à-dire qu'elles atteignent leur valeur maximale au bout d'un certain nombre de mois, voire de années.

La mise en tension des câbles de précontrainte s'effectue grâce à l'action de vérins hydrauliques. Au point le plus sollicité du câble, on évitera d'atteindre une valeur trop proche de la rupture de l'acier, c'est pourquoi on a fixé réglementairement une traction maximale de mise en tension à l'origine est notée σ_{po} .

Dans le cas de post-tension ou de pré-tension, σ_{po} prend la valeur suivante :

$$\sigma_{po} = \text{Min}(0,8 f_{prg} ; 0,90 f_{peg})^*$$

Avec f_{prg} : Contrainte de rupture garantie

f_{peg} : Limite conventionnelle d'élasticité à 0,1%

Dans le cas de produits industrialisés en pré-tension et faisant l'objet d'un système fiable d'assurance de qualité, cette valeur peut être prise égale à :

$$\sigma_{po} = \text{Min}(0,85 f_{prg} ; 0,95 f_{peg})$$

Pour les barres, la tension à l'origine est prise égale à :

$$\sigma_{po} = 0,7 f_{prg}$$

(*) La valeur admise dans les précédents règlements était $0,85 f_{prg}$.

Le coefficient 0,80 a été introduit pour tenir compte d'un nombre croissant de rupture de câble à la mise en tension.

Pour les tirants d'ancrage dans le sol « mur de soutènement, pieux ...etc. » on retiendra comme valeur de mise en tension :

- Pour les tirants provisoires : $\sigma_{po} = 0,75 f_{peg}$
- Pour les tirants définitifs : $\sigma_{po} = 0,60 f_{peg}$

Remarque : On dispose ainsi d'une marge de sécurité de 20 % sur la rupture d'un câble, d'un toron ou d'un fil pour couvrir les incertitudes de mesure de pression du vérin, de correspondance entre pression et effort de traction, de frottement parasite ; ce qui peut entraîner des variations de contraintes dans les différents torons d'un même câble.

II. Pertes Instantanées

II.1 Pertes Par Frottements

Les pertes par frottement sont provoquées par le frottement de l'acier des câbles sur la gaine métallique, ou plastique servant de conduite aux câbles. Lors de la mise en tension, le câble tiré du côté du vérin est fixe du côté opposé (ancrage mort dans le cas d'une mise en tension d'un seul côté). Le déplacement du câble à l'intérieur de la gaine est gêné par sa courbure s'il n'est pas rectiligne (le câble est plaqué sur le côté du centre de courbure), il en est de même en ligne droite, la gaine ni le câble ne sont rigoureusement rectilignes ; on admet en général une variation parasite de l'ordre de 0,5 à 0,75° d'angle équivalent par mètre de câble.

Câble Courbe « Relation Courbure-Force Radiale » : En supposant un élément de câble de longueur ds , de rayon de courbure r soumis à un effort de traction F . (Fig. IV.1)

- La force radiale P a pour résultante $P = p ds$
- La variation d'angle entre les deux extrémités de cet élément de câble vaut $d\alpha$
- On a naturellement $r = \frac{ds}{d\alpha}$

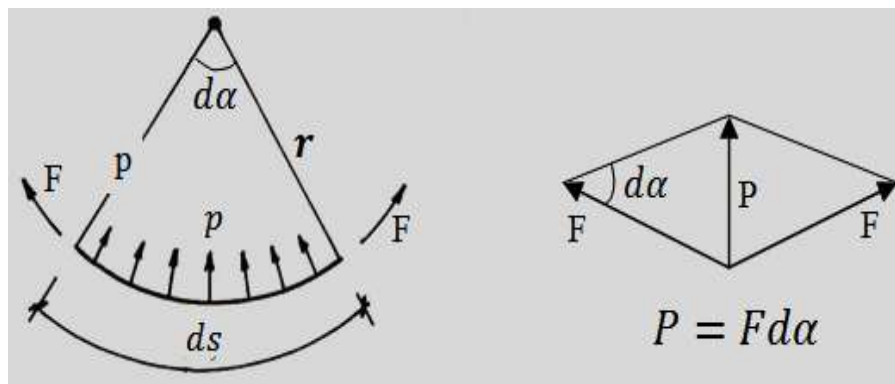


Fig. IV.1. Force réparties radiale due à la courbure d'un câble tendu

L'équilibre des forces donne : $P = F d\alpha = p ds$

Soit : $p = F \frac{d\alpha}{ds} = \frac{F}{r}$ $p = \frac{F}{r}$ (IV.1)

Remarque : cette formule est bien connue en hydraulique, elle donne la force de traction exercée par un liquide sur son enveloppe $F = pr$

Exemple : soit un câble parabolique de 30 m de longueur tendu à 1,7 MN et ayant une flèche de 1m. (Fig.IV.2)

- Calculer la pression radiale exercée par le câble sur le béton.

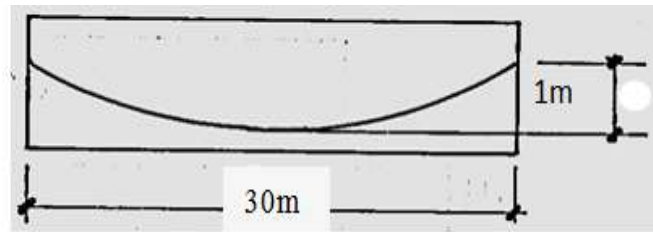


Fig. IV.2. Câble parabolique

II.1.1 Frottements En Courbe

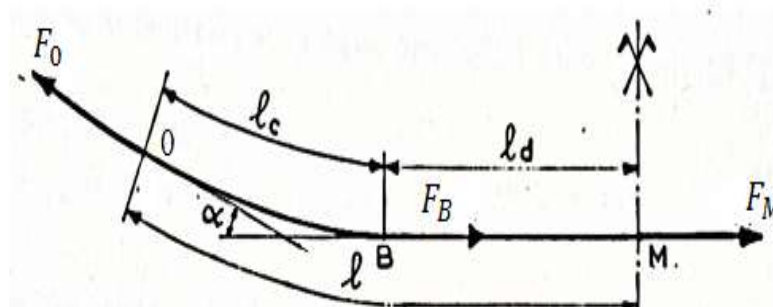


Fig. IV.3. Croquis d'un câble courant

Si f représente le coefficient de frottement, p la force radiale par unité de longueur, le frottement par mètre linéaire vaut (fig. III.3) :

$$\phi = -fp = -fF \frac{d\alpha}{ds}$$

Et la résultante du frottement dF vaut :

$$dF = \phi ds = -fF d\alpha$$

D'où l'équation différentielle : $\frac{dF}{F} = -f d\alpha$

En intégrant cette équation on obtient : $F_B = F_0 e^{-f\alpha}$ (IV.2)

Avec :

f : Coefficient de frottement fils sur gaine (0,1 à 0,3, soit 0,23 en général)

La valeur de α (exprimé en radian) : à prendre en compte est représentée par la somme des variations d'angle du câble entre l'ancrage et le point étudié.

II.1.2 Frottements En Ligne Droite

Le frottement en ligne droite, se conçoit moins bien, car si le câble est parfaitement rectiligne, il n'y a théoriquement pas de frottement; mais pratiquement les câbles droits présentent toujours dans leur tracé des imperfections et des sinuosités plus ou moins importante, entraînant un frottement qu'il serait vain de prétendre calculer avec précision, car tout calcul ne pourra se faire que sur une hypothèse préalable sur la déviation angulaire moyenne par mètre de câble droit, laquelle peut être très variable selon la qualité de la main-d'œuvre et la difficulté d'exécution.

Pour les parties en ligne droite, et d'après la moyenne des résultats d'un grand nombre de mesures sur les divers chantiers, on admet en général, dans les cas courant, que l'on a une déviation parasite α_d de 3/4 de degré par **mètre** en moyenne, soit :

$$\alpha_d = \frac{3}{4} * \frac{1,75}{100} = \frac{1,31}{100} \text{ radian par mètre} \left(\text{car } 1^\circ = \frac{\pi}{180} = \frac{1,75}{100} \text{ radian} \right).$$

On définit ainsi un *pseudo-coefficient* de frottement en ligne applicable par mètre de câble droit $\varphi = f\alpha_d$ et la tension en M (le tronçon BM étant droit (Fig.IV.3) sera :

$$F_M = F_B e^{-\varphi l_d} \quad (\text{IV.3})$$

Avec :

φ : Pseudo-coefficient de frottement en ligne droite en m^{-1}

II.1.3 Formule Générale Du Frottement

On admet que cette déviation parasite d'imperfection de tracé en ligne existe également dans les parties courbes ; c'est pourquoi on ajoute à la perte par frottement en courbe une perte par déviation parasite sur la longueur en courbe prise en compte.

On écrira donc, en reprenant la formule (IV.2) :

$$F_B = F_0 e^{-f\alpha - \varphi l_c}$$

On aura alors d'après la formule (IV.3) :

$$F_M = (F_0 e^{-f\alpha - \varphi l_c}) e^{-\varphi l_d}, \quad \text{Avec : } l = l_c + l_d$$

$$F_M = F_0 e^{-f\alpha - \varphi l} \quad (\text{IV.4})$$

C'est la formule générale donnant la perte par frottement dans un câble entre l'ancrage à l'origine **0** et un point quelconque **M** de ce câble.

II.1.4 Calcul Simplifié Des Pertes De Frottement

La formule exponentielle précédente peut se simplifier dans la plupart des cas si l'on remarque que dans le développement en série de

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Les termes de degré supérieur à 1 $\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$ deviennent négligeables si la valeur de l'exposant est faible (ce qui est le cas dans la **formule (IV.4)** où l'exposant de e est en générale inférieur à 0,2).

On peut alors négliger ces termes et admettre que $e^x = 1 + x$; on peut alors écrire la **formule (IV.4)** sous la forme :

$$F_M = F_0[1 - f\alpha - \phi l]$$

Si l'on exprime α en degré $\left(1^\circ = \frac{1,75}{100} \text{ radian}\right)$, et admettant la valeur courante de $f = 0,23$, on aura :

$$f\alpha = 0,23 \cdot \frac{1,75}{100} \alpha^\circ = \frac{0,4}{100} \alpha^\circ$$

Et

$$\phi = f\alpha_d = 0,23 \frac{3^\circ}{4} \frac{1,75}{100} = \frac{0,3}{100}$$

D'où

$$F_M = F_0 \left[1 - \frac{0,4}{100} \alpha^\circ - \frac{0,3}{100} l \right]$$

Remarquons que $\left(\frac{0,3}{100} \cdot l\right)$ s'écrit : $\frac{0,4}{100} (0,75 \cdot l)$ avec $l = l_d + l_c$ = longueur totale du câble entre les points **0 et M**.

La formule simplifiée s'écrit alors (avec α en degrés l en mètre) :

$$F_M = F_0 \left[1 - \frac{0,4}{100} (\alpha^\circ + 0,75 \cdot l) \right] \quad (\text{IV.5})$$

Cette formule permet de calculer la tension F_0 à réaliser au niveau de l'ancrage **0** pour obtenir une contrainte F_M en un point **M**

Remarque :

○ La **formule (IV.5)** est valable tant que la déviation angulaire équivalente totale $(\alpha + 0,75 \cdot l)$ ne dépasse pas une cinquantaine de degrés. Sinon l'erreur dépasserait 2 %, et il conviendrait de faire le calcul avec la **formule (IV.4)** ou la méthode graphique ci-après.

○ Il ne faut pas perdre de vue que les coefficients de frottement qui ne sont pas connus en général avec précision et que le calcul des pertes par frottement ne peut donner que des valeurs approchées de la réalité et ce, quelle que soit la méthode de calcul employée.

Application De La Formule (IV.5)

Prenons comme valeurs numériques (Fig.IV.3), où $\alpha = 20^\circ$; $l_c = 10 \text{ m}$; $l_d = 15 \text{ m}$

1. Si à l'ancrage on réalise une tension $F_0 = 130 \text{ kgf/mm}^2$ à la mise en tension, quelle sera la tension correspondante en M ?

2. Si on veut réaliser au point M une contrainte de 105 kgf/mm^2 à la mise en tension, quelle devra être la contrainte F_0 à réaliser à l'ancrage ?

II.1.5 Méthode Graphique Pour Le Calcul Des Pertes Par Frottement

Cette méthode permet de calculer graphiquement :

- Les pertes par frottements sur la totalité ou sur chaque tronçon d'un câble
- Les contraintes réalisées à la mise en tension en tout point d'un câble
- Les chutes de tension dues au glissement aux ancrages
- Les allongements

II.1.5.A Résumé De La Méthode

Cette méthode nécessite l'emploi d'un graphique à échelle logarithmique. Rien d'autre n'est nécessaire qu'une règle à calcul pour effectuer quelques simples règles de trois. Le choix des graduations de ce graphique permet de représenter, *par une simple droite à 45°*. La variation de contrainte le long du câble par suite des frottements à la mise en tension dans un câble de forme quelconque.

Cette représentation permet de résoudre rapidement la plupart des problèmes qui se posent à ce sujet :

- ☐ Contrainte en un point quelconque du câble.
- ☐ Mise en tension dissymétrique et détermination du point de contrainte minimale.
- ☐ Réalisation d'une contrainte donnée en un point donnée
- ☐ Allongements
- ☐ Effets de glissement aux ancrages

II.1.5.B Etablissement Du Graphique

On sait que si F_0 est la tension du câble à l'ancrage **A**, on aura en un point quelconque **M** du câble, une tension F_M (Fig.IV.4) telle que:

$$\frac{F_M}{F_0} = e^{-f\alpha - \phi l} \quad (\text{IV.6})$$

Avec: $l = l_d + l_c$ = longueur totale du câble entre les points **0** et **M**.

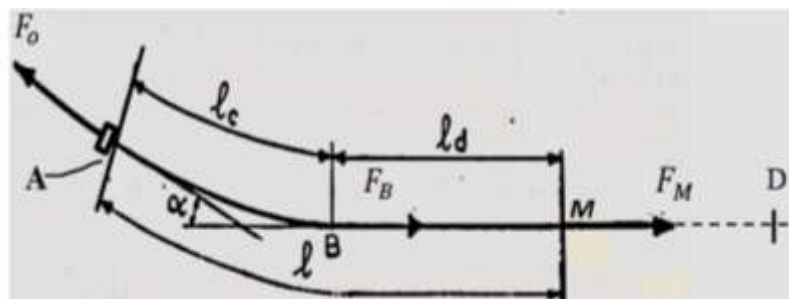


Fig. IV.4. Croquis d'un câble

Cette formule suppose, ce qui est admis en général, que le frottement de déviation parasite en ligne droite intervient également en courbe sur la longueur l_c de la même façon que sur la longueur l_d . Dans cette **formule (IV.6)** on aura :

f : Coefficient de frottement en courbe, en général: $0,10 \leq f \leq 0,3$, la valeur courante est : $f = 0,23$

α : Somme des angles de déviation (en radian) depuis l'ancrage jusqu'au point en question.

φ : Coefficient de frottement en ligne droite, en général: $0,1\% \leq \varphi \leq 0,5\%$, la valeur courante est $0,3\%$

l_d : Somme des longueurs en ligne droite (en mètre)

l_c : Somme des longueurs en courbe (en mètre)

D'où la **formule (IV.6)** peut s'écrire :

$$\log \frac{F_0}{F_M} = [f \cdot \alpha + \varphi \cdot l] \log e ;$$

or: α (en radians) = $\frac{1,75 \alpha \text{ (en degrés)}}{100}$

Logarithme : $\log e = 0,434$.

D'où la formule fondamentale :

$$1000 \log \frac{F_0}{F_M} = 7,55 f \alpha + 434 \varphi l$$

Avec :

α : En degrés et en mètre.

Si nous portons en abscisse, en les cumulant, les valeurs de l'expression $7,55 f \alpha + 434 \varphi l$, calculées pour chaque tronçon successif du câble, et en ordonnée les valeurs de $1000 \log \frac{F_0}{F_M}$, la fonction représentative sera une droite ; de plus, cette droite sera à 45° si nous portons la même unité en abscisse et en ordonnée, soit par exemple 1 mm par unité pour les valeurs données par la formule : « $7,55 f \alpha + 434 \varphi l$ » et 1 mm par unité pour les valeurs de $1000 \log \frac{F_0}{F_M}$

On peut préparer d'avance (en se limitant à un format 21 x 27 par exemple) un graphique gradué, en ordonnée, en $\log$ de $\frac{F_0}{F_M}$ de 0 à 0,243 (soit sur 243 mm), valeur correspondant au rapport $\frac{F_0}{F_M}$ de 1 à 1,75 ; on peut également établir la graduation suivant les contraintes usuelles pour l'acier couramment employé, soit par exemple de 160 kgf/mm² à l'ancrage où $\frac{F_0}{F_M} = 1,000$ jusqu'à 92 kgf/mm² au point de tension minimale où l'on aurait $\frac{F_0}{F_M} = 1,750$.

Dans le tableau ci-après on trouve, pour l'établissement du graphique, les ordonnées des points principaux à porter sur le graphique de 5 en 5 kgf/mm². On peut interpoler entre chacun d'eux pour avoir l'échelle des contraintes de kgf en kgf/mm².

Contrainte maximale $F_0 = 160 \text{ kgf/mm}^2$ (à l'ancrage)			$1000 \log \frac{F_0}{F_M}$
F_0	$\frac{F_0}{F_M}$	$\log \frac{F_0}{F_M}$	
160	1,000	0,00	0
155	1,032	0,013	13
150	1,067	0,028	28
145	1,103	0,043	43
140	1,143	0,058	58
135	1,185	0,074	74
130	1,231	0,090	90
125	1,280	0,107	107
120	1,333	0,125	125
115	1,391	0,143	143
110	1,455	0,163	163
105	1,524	0,183	183
100	1,600	0,204	204
95	1,684	0,226	226
90	1,778	0,250	250

II.1.5.C Principe D'utilisation Du Graphe

1. **Contraintes dans un câble** : Il faut tout d'abord porter en abscisse les valeurs de la formule $7,55f\alpha + 434\phi l$, calculées pour chacun des tronçons droits ou courbes du câble **AB, BC, CD, DE** par exemple (en supposant les ancrages en **A** et en **E** (Fig.IV.5)).

Si l'on désire réaliser en **C** la tension σ_P (comme tension minimale à la mise en tension) les droites à 45° issues de x_0 représentent la variation de la tension dans le câble ; il faudra donc tendre en **A** suivant la contrainte σ_{PA} , et la tension en **E**, suivant la contrainte σ_{PE} .

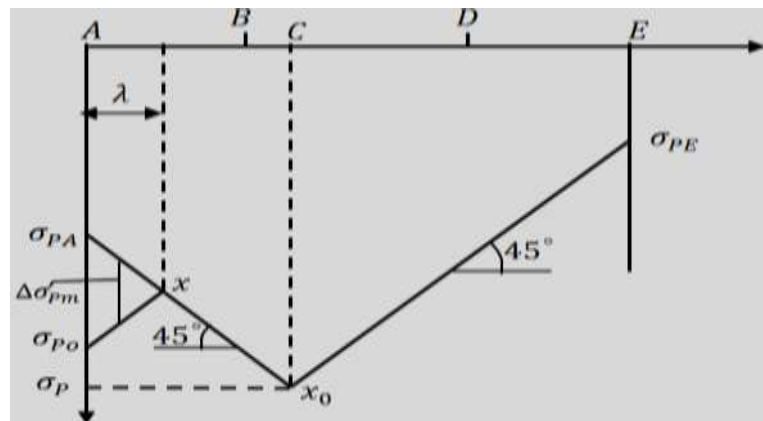


Fig.IV.5. Principe d'utilisation du graphique

Inversement, si l'on connaît la tension en **A**, la tension σ_{PA} et la tension en **E**, σ_{PE} la variation de contrainte dans le câble sera représentée par les droites à 45° issues de ces valeurs ; elles se coupent en donnant immédiatement la contrainte minimale dans le câble et le point où elle se produit.

2. **Allongement** : Sur le câble, on connaît la longueur l de chaque tronçon (droit ou courbe) ; pour connaître la contrainte moyenne σ_{pm} pour chaque tronçon. Il suffit de prendre sur la droite à 45° l'ordonnée du milieu du tronçon considéré, l'allongement est

$$\Delta l = \frac{\Sigma(l \cdot \sigma_{pm})}{E}$$

En cas de mise en tension dissymétrique, on peut également calculer l'allongement à chaque ancrage en faisant le calcul de part et d'autre du point de tension minimale.

3. Glissement à l'ancrage en cas d'ancrages à coincement conique

Lorsque, après blocage, on lâche la pression dans les vérins de tension, il se produit un léger glissement des fils Δl . Il est parfois utile de connaître la diminution de contrainte correspondante, ainsi que la longueur λ sur laquelle elle s'étale.

On connaît σ_{PA} qui est la contrainte à l'extrémité avant blocage ; posons $\Delta\sigma_{pm}$ qui est la chute moyenne de contrainte sur la longueur λ (après blocage), on a :

$$\frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{\Delta\sigma_{pm}}{E}$$

La diminution de contrainte entre le point d'ancrage et le point extrême où va finir de se faire sentir le glissement est encore représentée sur notre graphique par une droite à 45°. Mais dirigée dans le sens des contraintes croissantes σ_p à partir de l'ancrage, car c'est près de l'ancrage qu'a lieu la chute maximale de contrainte, le sens de frottement étant inversé.

Le tracé de cette droite à 45°, joint à l'équation précédente que l'on peut écrire

$$\lambda \cdot \Delta\sigma_{pm} = \Delta l \cdot E$$

Cela permet de calculer 2 des 3 variables $\Delta\sigma_{pm}$, ou Δl , on connaissant la troisième variable.

- 1^{er} cas : Si l'on se donne λ , le point x est situé, et le tracé de la droite à 45° issue de x donne immédiatement σ_{Po} la contrainte résiduelle à l'ancrage et $\Delta\sigma_{pm}$ est la chute moyenne de contrainte. D'où la valeur correspondante du glissement $\Delta l = \frac{\lambda \cdot \Delta\sigma_{pm}}{E}$ à ne pas dépasser pour que la chute de tension ne se fasse pas sentir au-delà de la longueur donnée λ à partir de l'ancrage.
- 2^{ème} cas : Si l'on se donne $\Delta\sigma_{pm}$ ou plutôt, en général, la valeur minimale de σ_{Po} de la contrainte résiduelle à l'ancrage après blocage. Le tracé de la droite à 45° issue de σ_{Po} donne immédiatement la position du point x , et donc la valeur de λ . On a par ailleurs: $\Delta\sigma_{pm} = \frac{\sigma_{PA} - \sigma_{Po}}{2}$, et l'on déduit la valeur à ne pas dépasser pour le glissement des fils $\Delta l \leq \frac{\lambda \cdot \Delta\sigma_{pm}}{E}$
- 3^{ème} cas : Enfin si l'on constate au blocage, un glissement Δl on en déduit la valeur du produit $(\lambda \cdot \Delta\sigma_{pm})$ qui est égal à $(\Delta l \cdot E)$. Il suffit alors par quelques tâtonnements successifs, de placer la droite à 45°, σ_{Po} et x de façon à déterminer λ et $\Delta\sigma_{pm}$. Pour que le produit $(\lambda \cdot \Delta\sigma_{pm})$ soit égal à la valeur calculée $(\Delta l \cdot E)$.

✚ Exemple et Application

Soit un câble dissymétrique, les coefficients de frottements sont: $f = 0,23$ et $\varphi = 0,30$ (Fig.IV.6)

1. Nous voulons que la contrainte minimale à la mise en tension soit 102 kgf/mm^2 et qu'elle se trouve au point N situé, par exemple à 20 m du point B : quelles seront les contraintes à réaliser à chacune des extrémités ?
2. Quels seront les allongements correspondant à chacune des extrémités A et E ?
3. Nous ne voulons pas qu'à l'ancrage A la contrainte réduite après blocage au-dessous de la valeur de 100 kgf/mm^2 ; quel sera en conséquence le glissement latéral tolérable ?
4. Si à l'ancrage E le glissement constaté est de 7 mm, quelle sera la valeur résiduelle de la contrainte au point E après le blocage et sur quelle longueur s'étendra la chute de tension correspondante ?
5. Si l'on tend en A comme en E à 130 kgf/mm^2 , où se trouve le point de tension minimale et quelle est sa valeur ?

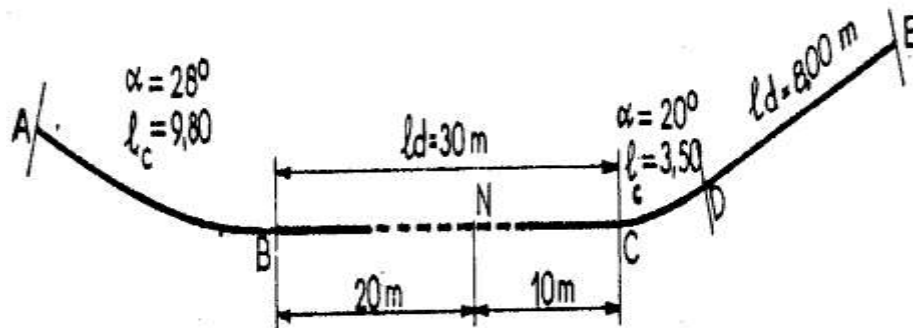


Fig.IV.6. Câble dissymétrique

II.2 Pertes Par Glissement À L'ancrage (Par Recul D'ancrage)

Ces pertes correspondent à un glissement des torons ou fils dans les clavettes et des clavettes dans les plaques d'ancrages lors de la dé-tension du vérin et du blocage des clavettes.

Ce glissement prend des valeurs de 1 à 12 mm suivant la puissance de l'ancrage et le procédé de précontrainte utilisé. Il figure dans la fiche d'agrément. Ce mouvement qui a lieu en sens inverse de celui qui a été créé par la mise en tension, provoque un frottement de signe opposé au précédent.

L'influence de perte de tension par recul d'ancrage diminue jusqu'à s'annuler à une distance λ à partir de laquelle la tension demeure inchangée (Fig.IV.7)

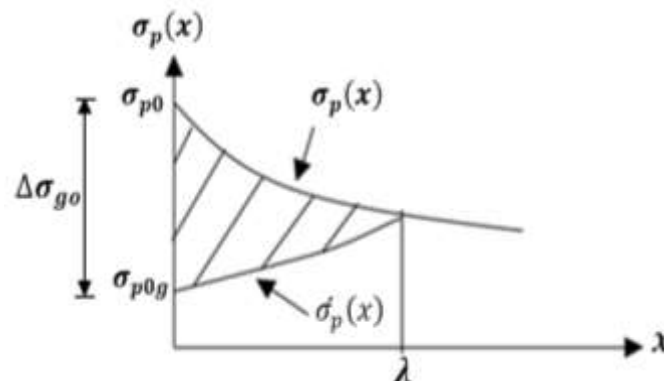


Fig.IV.7 Perte de tension à partir de l'aire des branches courbes

Un élément de câble de longueur dx subit un raccourcissement dû à $\Delta\sigma$ égal à $dx \cdot \Delta\sigma / E_p$.
Le glissement à l'ancrage g est donné par la relation suivante :

$$g = \frac{1}{E_p} \int_0^\lambda [\sigma_{po}(x) - \sigma_p(x)] dx$$

En pratique, en assimilant les branches courbes à des droites, la perte par recul d'ancrage peut être évaluée à partir de l'aire d'un triangle (Fig.IV.8)

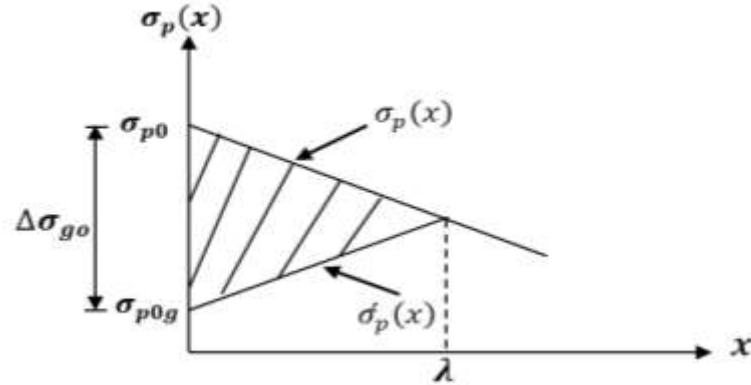


Fig.IV.8 Perte de tension à partir de l'aire d'un triangle

Dans ce cas, on a: $gE_p = (\sigma_{po} - \sigma_{pog}) \frac{\lambda}{2}$

D'après la loi des triangles semblables IJL et INM, on a: $\frac{\sigma_{po} - \sigma_{pog}}{2\lambda} = \frac{\sigma_{po} - \sigma_{pB}}{l_{AB}}$

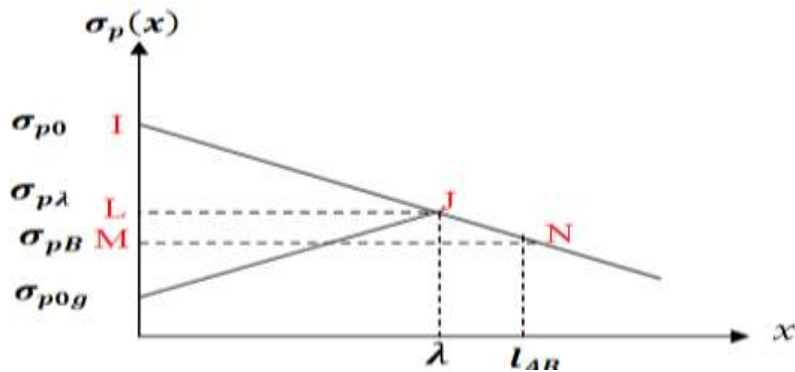


Fig.IV.9 Perte de tension et la loi des triangles semblables

En remplaçant cette dernière formule dans la formule précédente, on obtient la longueur du glissement du bloc d'ancrage est donnée par :

$$\lambda = \sqrt{\frac{gE_p l_{AB}}{\sigma_{po} - \sigma_{pB}}}$$

II.2.3 Non-Simultanéité De Mise En Tension Des Différents Câbles

Supposons qu'une poutre soit armée avec plusieurs câbles de précontrainte. La mise en tension des câbles ne pouvant s'effectuer que câble par câble, la mise en tension du deuxième câble va entraîner un raccourcissement de la poutre et du premier câble ; de même la mise en tension du troisième câble va entraîner un raccourcissement de la poutre et les deux premiers câbles et ainsi de suite.

Prenons l'exemple d'une poutre à deux câbles, chaque câble reprend un effort de $P/2$, le raccourcissement du béton à la mise en tension d'un câble vaut :

$$\frac{\Delta l_b}{l} = \frac{\sigma_b}{E_{bi}} = \frac{P}{2 S \cdot E_{bi}}$$

Si : S Désigne l'aire de béton,

E_{bi} Module instantané du béton,

$$\Delta l_b = \text{Raccourcissement du béton} = \frac{Pl}{2 S \cdot E_{bi}}$$

À la mise en tension du deuxième câble, le béton se raccourcit de Δl_b , il en est donc de même pour le premier câble qui subit un raccourcissement :

$$\Delta l_p = \Delta l_b = l \frac{\Delta \sigma_p}{E_p} = \frac{Pl}{2 S \cdot E_{bi}}$$

La chute de contrainte (perte de tension) dans le premier câble à la mise en tension du deuxième câble vaut :

$$\Delta \sigma_p = \frac{1}{2} \frac{E_p \cdot \sigma_b}{E_{bi}}$$

Comme le deuxième câble n'est pas influencé, la perte moyenne des deux câbles vaut :

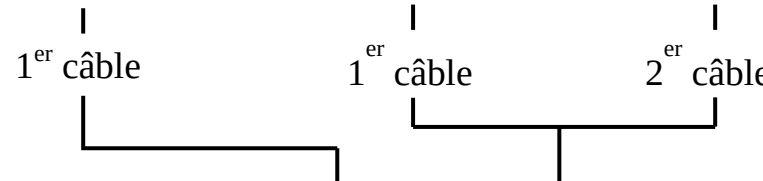
$$\Delta \sigma_p = \frac{1}{4} \frac{E_p \cdot \sigma_b}{E_{bi}}$$

Pour trois câbles, on obtient à la mise en tension du deuxième câble, un effort $\frac{P}{3}$ et un raccourcissement du béton $\Delta l_b = \frac{Pl}{3 S \cdot E_{bi}}$, donc un raccourcissement du premier câble $\frac{Pl}{3 S \cdot E_{bi}}$ pour un effort $\frac{P}{3}$.

Pour la mise en tension du troisième câble, le raccourcissement du béton (et donc des deux premiers câbles) vaut :

$$\frac{Pl}{3 S \cdot E_{bi}}$$

Soit un raccourcissement moyen égal à :

$$\frac{l}{S \cdot E_{bi}} \times \frac{1}{3} \left(\frac{P}{3} + \frac{P}{3} + \frac{P}{3} \right) = \frac{1}{3} \frac{Pl}{SE_{bi}}$$


À la mise en tension du : 2^{ème} câble 3^{ème} câble

$$\text{D'où une perte moyenne : } \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}} = \frac{1}{3} \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}} \quad 1^{\text{er}} \text{ câble}$$

$$\text{Pour 4 câbles on obtient : } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}} = \frac{3}{8} \frac{E_p \cdot \sigma_b}{E_{bi}}$$

Et pour n câbles :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots \right) \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \cdot \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}}$$

$$\Delta \sigma_n = \frac{(n-1)}{2n} \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}}$$

Avec : n = nombre de câbles

E_p : Module de Young des aciers de (200 000 MPa pour les fils et 190 000 MPa pour les torons).

σ_{bo} : Contrainte moyenne du béton au niveau du cable à la mise en tension.

E_{bi} : Module instantané du béton.

Pour $n=2$ le coefficient vaut 1/4

Pour $n=3$ le coefficient vaut 1/3

Pour $n=4$ le coefficient vaut 3/8

Pour $n=\infty$ le coefficient vaut 1/2

Exemple et Application

Pour un béton de contrainte caractéristique $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$

$\sigma_b = 7,5 \text{ MPa}$, $E_p = 190\,000$, avec 8 câbles, $E_{bi} = 34\,200 \text{ MPa}$

$$\Delta \sigma_n = \frac{(n-1)}{2n} \frac{E_p \sigma_b}{E_{bi}} = \frac{7}{2 \cdot 8} * \frac{190\,000 * 7,5}{34\,200} = 18,2 \text{ MPa}$$

II.3 Pertes Différées

II.3.1 Perte Due Au Retrait

Le retrait est un phénomène de raccourcissement du béton dans le temps, dû à une évaporation de l'eau excédentaire contenue dans le béton et à des réactions chimiques. Ce retrait a lieu dans les premiers mois après le coulage du béton.

Forfaitairement pour le calcul des pertes, le règlement BPEL admet de prendre les valeurs suivantes :

Retrait en 10^{-4}	ε_r
Climat très humide	1,5
Climat humide	2
Climat tempéré sec	3
Climat chaud et sec	4
Climat très sec ou désertique	5

La valeur de la perte de précontrainte due au retrait vaut :

$$\Delta\sigma_r = \varepsilon_r \cdot E_p$$

II.3.2 Perte Due Au Fluage

Le fluage est caractérisé par une augmentation de la déformation du béton dans le temps. Ainsi pour une pièce comprimée qui subit un raccourcissement instantané ε_i à la mise en charge, on constate que la déformation totale augmente et peut atteindre 3 fois la déformation instantanée.

Le raccourcissement instantané vaut :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_{bc}}{E_{bi}}$$

Le raccourcissement final vaut environ $3 \frac{\Delta l}{l}$, la part due au fluage vaut donc :

$$\varepsilon_{fl} = \frac{2\sigma_{bc}}{E_{bi}}$$

Le raccourcissement des aciers de précontrainte vaut donc ε_{fl} , ce qui entraîne une perte de précontrainte $\Delta\sigma_{fl}$:

$$\Delta\sigma_{fl} = 2\sigma_{bc} \frac{E_p}{E_{bi}}$$

Où σ_{bc} représente la contrainte moyenne du béton au niveau du câble, que l'on peut supposer calculée à un temps infini.

Pour plus de précision, on pourra utiliser la formule donnée par le BPEL :

$$\Delta\sigma_{fl} = (\sigma_b + \sigma_M) \frac{E_p}{E_{ij}}$$

Où, σ_b représente la contrainte finale et σ_M la contrainte maximale supportée par le béton dans la section considérée, au niveau du centre de gravité des armatures de précontraintes sous l'action de la précontrainte et aux actions permanentes qui peuvent être variables dans le temps (précontrainte qui diminue et contraintes dues aux charges permanentes qui peuvent varier en hausse ou en baisse dans le temps).

II.3.3 Perte Par Relaxation

La relaxation de l'acier est un relâchement de tension à longueur constante. Elle n'apparaît pour les aciers à haute limite élastique utilisée en béton précontraint que pour les contraintes supérieures à 30 ou 40 % de leur contrainte de rupture garantie.

Elle dépend de la nature de l'acier, de son traitement et l'on distingue des aciers :

- à relaxation normale, RN
- à très basse relaxation, TBR

Compte tenu de la faible différence de coût existant entre ces aciers, l'économie réalisée sur les aciers par une perte par relaxation plus faible, fait choisir en général les aciers TBR.

Un acier est caractérisé par sa relaxation à :

$$1\ 000 \text{ heures exprimée en } \% = \rho_{1\ 000}$$

En général : $\rho_{1\ 000} = 2,5 \%$ pour les aciers **TBR**

Et, : $\rho_{1\ 000} = 8 \%$ pour les aciers **RN**

La perte par relaxation s'écrit alors :

σ_{pi} étant la tension initiale de l'acier, c'est-à-dire après pertes instantanées, f_{prg} la contrainte de rupture garantie, μ_0 un coefficient pris égal à :

- 0,43 pour les aciers, **TBR** ;
- 0,30 pour les aciers, **RN** ;
- 0,35 pour les autres aciers.

$$\Delta\sigma_{rel} = \frac{6}{100} \left(\frac{\sigma_{pi}}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \cdot \sigma_{pi} \cdot \rho_{1\ 000}$$

II.3.4 Variation Dans Le Temps Des Pertes Différées

La perte différée finale est prise égale à :

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel}$$

Le coefficient $\frac{5}{6}$ tient compte de la non-indépendance des pertes, la perte par relaxation diminue sous l'effet du retrait et du fluage du béton.

II.4 Précontrainte De Calcul En BPEL P_d

II.4.1 En Etat-Limite De Service

La précontrainte de calcul est égal à la plus défavorable des deux valeurs :

- Précontrainte maximale $\sigma_{p1} = 1,02 \cdot \sigma_{p0} - 0,8 \cdot \Delta\sigma_p$;
- Précontrainte minimale $\sigma_{p2} = 0,98 \cdot \sigma_{p0} - 1,2 \cdot \Delta\sigma_p$

Avec : $\Delta\sigma_p$ = pertes totales de précontraintes instantanées plus différées

$$\sigma_p = \sigma_{p1} \text{ ou } \sigma_{p2}$$

On prend ainsi en compte deux incertitudes :

- L'une de 2 % sur la valeur de précontrainte à la mise en tension P_0 (lecture, étalonnage du vérin et de la pompe hydraulique) ;
- L'autre de 20 % sur l'évaluation des pertes de précontraintes.

Sauf dans les sections de vérification particulière, on pourra faire les calculs avec la valeur probable (et moyenne) de précontrainte.

$$\sigma_{pm} = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_p$$

II.4.2 En Etat-Limite Ultime

La précontrainte de calcul vaut :

$$\sigma_p = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_p = \sigma_{pm}$$