مراجعات وتتمّات

القسم الثاني: خواص أساسية للمجموعة $\mathbb{R}$ (Basic Properties of the Set $\mathbb{R}$)

تُعد مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ حجر الزاوية في التحليل الرياضي، حيث تتميز بخاصية جوهرية تُعرف باسم "مسلمة الاكتمال" أو "مسلمة الحد الأعلى". هذه الخاصية هي التي تميز $\mathbb{R}$ عن مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ وتُكسبها بنيتها المتصلة التي لا تحتوي على "فجوات". بدون هذه المسلمة، يصبح من المستحيل تطوير مفاهيم أساسية مثل النهايات، والاستمرارية، والمشتقات، والتكاملات التي تشكل أساس حساب التفاضل والتكامل والتحليل. في هذا القسم، سنستعرض هذه المسلمة التأسيسية وتوابعها الهامة، بدءً من تعريف الحواد والمجموعات المحدودة، وصولًا إلى خاصية أرخميدس وكثافة الأعداد الناطقة، وانتهاءً بدراسة المجالات ومبدأ كانتور للمجالات المتداخلة.

1. مسلمة الحد الأعلى (The Axiom of the Least Upper Bound)

تمثل مسلمة الحد الأعلى الخاصية الأساسية التي تضمن "اكتمال" مستقيم الأعداد الحقيقية. لفهم هذه المسلمة، يجب أولًا تعريف المفاهيم المتعلقة بالحواد والمجموعات المحدودة.

1.1. تعريفات أساسية: الحواد والمجموعات المحدودة (Bounds and Bounded Sets)

تعريف 1: لتكن S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

- نقول إن العدد الحقيقي L <u>حَادٌّ عُلْوِيٌّ</u> (upper bound) للمجموعة S إذا تحقق:

$$\forall x \in S : x \leq L.$$

- ونقول إن العدد الحقيقي l <u>حَادٌّ دُنْوِيٌّ</u> (lower bound) للمجموعة S إذا تحقق:

$$\forall x \in S : x \geq l.$$

بناءً على هذه التعريفات، يمكننا تصنيف المجموعات كما يلي:

- <u>مَحْدُودَةٌ مِّنَ الأَعْلَى</u> (Bounded Above) : نقول عن المجموعة S إنها محدودة من الأعلى إذا كان لها حَادٌّ عُلْوِيٌّ.

- **مَحْدُودَةٌ مِّنَ الأَدْنَى** (Bounded Below) : نقول عن المجموعة S إنها محدودة من الأدنى (أو الأسفل) إذا كان لها حَادٌّ دُنْوِيٌّ.
- **مَحْدُودَةٌ** (Bounded) : نقول عن S إنها محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أدنى.

ملاحظات هامة:

- إذا كان للمجموعة S حاد علوي، فإن الأعداد الحقيقية التي تَكْبُره هي أيضًا حواد عليا لـ S. وبالمثل، إذا كان للمجموعة S حاد دنوي، فإن جميع الأعداد الحقيقية التي تَصْغُره حواد دنيا لـ S.
- تكون المجموعة S محدودة إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\exists a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathrm{S} : |x| \leq a.$$

2.1. الحد الأعلى (Supremum) والحد الأدنى(Infimum)

من بين جميع الحواد العليا لمجموعة ما، يهمنا بشكل خاص أصغرها. وبالمثل، من بين جميع الحواد الدنيا، يهمنا أكبرها.

تعريف 2: (الحد الأعلى، Supremum) لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ ومحدودة من الأعلى.
أصغر الحواد العليا لـ S يسمّى <u>الحد الأعلى</u> (supremum = least upper bound = borne supérieure)
ويرمز له بالرمز sup S.

قضية 1: (تمييز الحد الأعلى) يكون العدد الحقيقي L_0 هو الحد الأعلى للمجموعة S إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1) $\forall x \in \mathrm{S} : x \leq L_0$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathrm{S} : x_0 > L_0 - \varepsilon.$

الشرط (1) يعني أنّ L_0 حاد عُلْوِيٌّ لـ S، في حين يفيد الشرط (2) أنه لا يوجد حاد علوي للمجموعة S أصغر من L_0.

تعريف 3: (الحد الأدنى، Infimum) لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ ومحدودة من الأدنى.
أكبر الحواد الدنيا لـ S يسمى <u>الحد الأدنى</u> (infimum = the greatest lower bound = borne inférieure)
ويرمز له بالرمز inf S.

قضية 2: (تمييز الحد الأدنى) يكون العدد الحقيقي l_0 هو الحد الأدنى للمجموعة S إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

(1) $\forall x \in \mathrm{S} : x \geq l_0$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in \mathrm{S} : y_0 < l_0 + \varepsilon.$

يشير الشرط (1) إلى أنّ l_0 حَادٌّ دُنْوِيٌّ لـ S ، في حين يفيد الشرط (2) أنه لا يوجد حاد دنوي للمجموعة S أكبر من l_0.

3.1. مسلمة الاكتمال والحدود القصوى (The Completeness Axiom and Extrema)

نصل الآن إلى الخاصية المحورية التي تميز $\mathbb{R}$.

قضية 3: (مسلمة الحد الأعلى The least upper bound axiom=Axiome de la borne supérieure) كل جزء غير خالٍ من $\mathbb{R}$ محدود من الأعلى يقبل حدًا أعلى في $\mathbb{R}$.

ملاحظة: إذا كان S جزء غير خالٍ من $\mathbb{R}$ ومحدودًا من الأدنى، فإنه يقبل حدًا أدنى. يمكن إثبات ذلك اعتمادا على مسلمة الحد الأعلى بالاستفادة من العلاقة $\inf \mathrm{S} = -\sup(-\mathrm{S})$، حيث

$$-\mathrm{S} = \{-x;\ x \in \mathrm{S}\}.$$

القيمة العظمى (Maximum) والقيمة الصغرى (Minimum):

تعريف 4:

- نقول عن العدد الحقيقي M إنه <u>القيمة العظمى</u> (Maximum) للمجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}$، ونكتب $M = \max \mathrm{S}$، إذا تحقق:
  1. M حاد علوي للمجموعة S
  2. $M \in \mathrm{S}$.
- ونقول عن العدد الحقيقي m إنه <u>القيمة الصغرى</u> (Minimum) للمجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}$، ونكتب $m = \min \mathrm{S}$، إذا تحقق:
  1. m حاد دنوي للمجموعة S
  2. $m \in \mathrm{S}$.

قضية 4: إذا وجدت القيمة العظمى (الصغرى) للمجموعة S، فإن هذه القيمة هي الحد الأعلى (الحد الأدنى) للمجموعة S.

مثال: $S = [0, 1[$ هنا، $\sup S = 1$ و $\inf S = 0$ وبما أن $1 \notin S$ و $0 \in S$، فإن $\max S$ غير موجود في حين أنّ $\min S = 0$.

تُعد مسلمة الحد الأعلى أساسًا لإثبات خاصية أساسية أخرى في $\mathbb{R}$، وهي خاصية أرخميدس، التي تربط بين الأعداد الحقيقية والأعداد الطبيعية.

2. مسلمة أرخميدس وتوابعها (The Archimedean Property and its Consequences)

خاصية أرخميدس هي التعبير الرياضي الدقيق عن فكرة بديهية مفادها أنه لا يوجد عدد حقيقي "كبير لانهائيًا" مقارنة بعدد حقيقي آخر موجب، وأنه يمكن دائمًا تجاوز أي عدد حقيقي عن طريق إضافة عدد طبيعي من المرات. هذه الخاصية ضرورية لإثبات كثافة الأعداد الناطقة وغير الناطقة في $\mathbb{R}$.

1.2. خاصية أرخميدس (The Archimedean Property)

مبرهنة 1: تحقق المجموعة $\mathbb{R}$ مسلمة أرخميدس، أي أنه من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a > 0$، يوجد عدد طبيعي (غير معدوم) n بحيث $na > b$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a > 0 \Longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^* : na > b) \qquad (1)$$

ملاحظة: العبارة السابقة تكافئ العبارة التالية:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* : n > x \qquad (2)$$

والتي تعني أنّ المجموعة الجزئية $\mathbb{N}^*$ من $\mathbb{R}$ غير محدودة من الأعلى.

بالفعل، لنفرض أن (2) محققة، وليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a > 0$. بناء على (2)، يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $n > \frac{b}{a}$ أي $na > b$ وهو المطلوب.

عكسا، لنفرض أنّ (1) محققة، وليكن x عددا حقيقيا كيفيا. بناء على (1) يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $n.1 > x$ أي $n > x$ وهو المطلوب.

إثبات العبارة (2): لنفترض أن $\mathbb{N}^*$ محدودة من الأعلى في $\mathbb{R}$. إذن، حسب مسلمة الحد الأعلى، فإنها تقبل حدًا أعلى وليكن $b = \sup \mathbb{N}^*$. من خاصية الحد الأعلى، العدد $b - 1$ ليس حادا علويًا لـ $\mathbb{N}^*$ ومنه $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ بحيث $b - 1 < n_0$ أي $b < n_0 + 1$ وبما أن $n_0 + 1 \in \mathbb{N}^*$ ، فهذا يعني أن b ليس حادا علويًا لـ $\mathbb{N}^*$ وهذا تناقض.

2.2. كثافة الأعداد الناطقة في $\mathbb{R}$ (Density of Rational Numbers in $\mathbb{R}$)

إحدى أهم نتائج خاصية أرخميدس هي أن "مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ كثيفة في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ".

نتيجة 1: (كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$، Density of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) بين كل عددين حقيقيين مختلفين a و b، يوجد عدد ناطق q.

إثبات: بناءً على مسلمة أرخميدس، من أجل $0 < b - a$ و $0 < 1$، يوجد عدد طبيعي غير معدوم n بحيث $n(b-a) > 1$ ويوجد عدد صحيح وحيد m بحيث $m - 1 \leq na < m$.

من $m - 1 \leq na$ نستنتج أن $\frac{m-1}{n} \leq a$ ومنه

$$a < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$$

إذًا $a < \frac{m}{n} < b$ و $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ يحقق المطلوب.

ملاحظة :المجموعة $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (مجموعة الأعداد غير الناطقة) كثيفة أيضًا في $\mathbb{R}$، أي بين كل عددين حقيقيين مختلفين يوجد أيضًا عدد أصم.

بعد استعراض الخصائص الجوهرية لمستقيم الأعداد الحقيقية، ننتقل الآن إلى دراسة أهم المجموعات الجزئية المستخدمة في التحليل، وهي المجالات.

3. المجالات (Intervals)

تُعد المجالات (Intervals) من أكثر أنواع المجموعات الجزئية أهمية في التحليل الحقيقي. فهي تمثل مجموعات متصلة من الأعداد، وتلعب دورًا محوريًا في تعريف مفاهيم مثل الجوار، والنهايات، والاستمرارية، وتحديد طوبولوجيا مستقيم الأعداد الحقيقية.

1.3. تعريف وتصنيف المجالات (Definition and Classification of Intervals)

تعريف 5: ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a \leq b$. نسمي <u>مجالًا من $\mathbb{R}$</u> كل مجموعة من المجموعات التالية:

	الرمز (Notation)	التعريف (Definition)
(1)	$[a, a]$	$\{ a \}$
(2)	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$
(3)	$]\, a, b\, [$	$\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
(4)	$]\, a, b]$	$\{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$
(5)	$[a, b\, [$	$\{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$
(6)	$]-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$
(7)	$]-\infty, b\, [$	$\{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$
(8)	$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$
(9)	$]\, a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$
(10)	$]-\infty, +\infty[$	$\mathbb{R}$

تصنيف المجالات:

- **مجال منحل (degenerate) أو مبسّط إلى نقطة** : المجال (1).
- **مجالات مغلقة (closed)** : المجالات (1)، (2)، (6)، (8).
- **مجالات مفتوحة (open)** : المجالات (3)، (7)، (9)، (10).
- **مجالات نصف مفتوحة (half-open)** : المجالات (4)، (5).
- **مجالات محدودة (bounded)** : المجالات (1)، (2)، (3)، (4)، (5) **طرفاها (endpoints)** : العددان a و b وطولها **(length)** : العدد الحقيقي $b - a$.
- **مجالات غير محدودة (unbounded)** : المجالات (6)، (7)، (8)، (9)، (10).

ملاحظة: كل مجال من $\mathbb{R}$ هو مجموعة غير خالية، ويحوي عددا لانهائيا من الأعداد ما لم يكن منحلا.

تعريف 6: ليكن a و h عددين حقيقيين بحيث $h > 0$. نسمّي مجالا مفتوحا مركزه a (center) ونصف قطره h (radius) ، المجال المفتوح من الشكل $]a - h, a + h[$.

قضية 5: (تمييز المجالات) يكون جزء غير خال I من $\mathbb{R}$ مجالا إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\forall a,b \in I : a < b \Rightarrow [a,b] \subset I$$

أي بعبارة أخرى

$$\forall a,b \in I, a < b, \forall x \in \mathbb{R} : a < x < b \Rightarrow x \in I.$$

2.3. مبدأ كانتور للمجالات المتداخلة (Cantor's Principle for Nested Intervals)

يُعد مبدأ كانتور نتيجة مباشرة لمسلمة الاكتمال، ويضمن وجود نقطة مشتركة واحدة على الأقل في تقاطع متتالية لامتناهية من المجالات المغلقة والمتداخلة.

تعريف 7: (مجالات متداخلة، Nested Intervals) نقول عن متتالية مجالات $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها متداخلة إذا كان كل مجال منها يحوي المجال الذي يليه، أي:

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n.$$

مبرهنة 2: (مبدأ كانتور للمجالات المتداخلة) كل متتالية مجالات **مغلقة ومحدودة ومتداخلة** $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ تتمتع بتقاطع **غير خالٍ**:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

إثبات: لنضع $I_n = [a_n, b_n]$ ولنعتبر المجموعتين:

$$B = \{b_1, b_2, \dots\} \text{ و } A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

المؤلفتين على التوالي من الأطراف اليسرى والأطراف اليمنى للمجالات I_n.

بما أنّ $I_{n+1} \subset I_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإنّ المتتالية (a_n) متزايدة والمتتالية (b_n) متناقصة. ومنه يأتي:

$$\forall m,n \in N: a_m \leq b_n.$$

بالفعل، $m > n$ فإنّ $a_m \leq b_m \leq b_n$ وإذا كان $m \leq n$ فإنّ $a_m \leq a_n \leq b_n$. وهذا يعني أنّ المتتالية (a_n) محدودة من الأعلى بأي b_m والمتتالية (b_n) محدودة من الأدنى بأي a_m إذًا A تقبل $\sup A$ و B تقبل $\inf B$ ولدينا $\forall n \in \mathbb{N} : \sup A \leq b_n$، مما يعني $\sup A \leq \inf B$. لنثبت أن $[\sup A, \inf B] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. من الواضح أن $a_n \leq \sup A$ و $\inf B \leq b_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

إذًا $I_n = [a_n, b_n] \subset [\sup A, \inf B]$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. بالتالي، $[\sup A, \inf B] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
وبما أن $\sup A \leq \inf B$، فإن هذا التقاطع غير خالٍ.

ملاحظة: من اليسير التأكّد بأنّ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\sup A, \inf B]$. بالفعل، لدينا من جهة:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ [\sup A, \inf B] \subset I_n$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq x \leq b_n) \Rightarrow (\sup A \leq x \leq \inf B) \Rightarrow x \in [\sup A, \inf B]$$

ومنه $[\sup A, \inf B] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

ملاحظة: من اللازم أن تكون المجالات مغلقة ومحدودة ليبقى المبدأ صحيحًا كما يتبيّن من خلال المثالين المضادين التاليين:

- المجالات المتداخلة المحدودة غير المغلقة $I_n = \left]0, \frac{1}{n}\right]$ ذات تقاطع خالٍ.

- المجالات المتداخلة المغلقة غير المحدودة $I_n = [n, +\infty[$ ذات تقاطع خالٍ.

قضية 6: يكون تقاطع متتالية مجالات مغلقة ومحدودة ومتداخلة $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ مؤلفًا من نقطة واحدة إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

إثبات: في هذه الحالة، المتتاليتان (a_n) و (b_n) متجاورتان وبالتالي متقاربتان نحو نفس النهاية l. ولكن

$$l = \lim a_n = \sup A$$

و

$$l = \lim b_n = \inf B$$

ما يترتب عنه $\sup A = \inf B$ ، ومنه $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{\sup A\} = \{\inf B\}$ مؤلف من نقطة واحدة.

خاتمة القسم الثاني:

لقد استعرضنا الخصائص التأسيسية لمجموعة الأعداد الحقيقية، بدءً من **مسلمة الاكتمال** التي تضمن عدم وجود فجوات، مرورًا **بخاصية أرخميدس** التي تربط بين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$، و**كثافة الأعداد الناطقة** التي تظهر تداخلها اللامتناهي مع الأعداد غير الناطقة، وانتهاءً **بمبدأ كانتور** الذي يكشف عن نتيجة قوية للاكتمال عند تطبيقها على متتاليات المجالات.

هذه الخصائص المترابطة هي التي تبني معًا الصرح المتين لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، وتجعلها البيئة المثالية والكاملة التي لا غنى عنها لدراسة التحليل الرياضي وحساب التفاضل والتكامل.