المحور الرابع: الارتباط الذاتي للأخطاء

المحاضرة 5: تابع

4-طرق التقدير في حالة وجود الارتباط الذاتي للأخطاء

توجد العديد من الطرق لتقدير معامل الارتباط الذاتي للأخطاء، نذكر من أهمها:

4-1- الطريقة الاولى: باستعمال احصائية DURBIN-WATSON

حسب هذه الطريقة يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي من خلال احصائية DURBIN-WATSON، والتي يرمز لها عادة بالرمز DW، والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = 2 \cdot (1 - \hat{\rho})$$

وبالتالي يمكن تقدير معامل الارتباط كالتالي:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$$

4-2- الطريقة الثانية: التقدير باستعمال طريقة THEIL-NAGAR

وهي طريقة مطورة لطريقة DURBIN WATSON في تقدير معامل الارتباط الذاتي، إذ أخذ الباحثان THEIL وNAGAR في بحثهما سنة 1961 عدد المتغيرات المستقلة وحجم العينة n في تقدير هذا المعامل، من خلال الصيغة التالية:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left(1 - \frac{DW}{2}\right) + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

4-3- الطريقة الثالثة: التقدير باستعمال طريقة COCHRANE-OREUTE

قدم كل من COCHRANE وOREUTTE بحثا مشتركا سنة 1949 حول طريقة تقدير معامل الارتباط الذاتي، حيث اقترحا أن يتم تقديره وفق العلاقة التالية:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t \cdot e_{t-1}}{\sum e_{t-1}^2}$$

حيث: e: تمثل بواقي تقدير النموذج، أي: $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ و $e_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1}$.

5- طرق معالجة مشكلة الارتباط الذاتي

كما نوقش في المحاضرة السابقة، يشكل وجود الارتباط الذاتي (Autocorrelation) في بواقي نموذج الانحدار مشكلة جوهرية لا يمكن تجاهلها. حيث يؤدي هذا الارتباط إلى عدم كفاءة مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS)، على الرغم من بقائها غير متحيزة، مما يضعف الثقة في استنتاجات ونتائج التحليل الإحصائي. لذلك، يصبح الاستخدام المباشر لنتائج التقدير في ظل وجود الارتباط الذاتي لأغراض التنبؤ أو بناء السياسات الاقتصادية أمرا غير موصى به قبل معالجة هذه المشكلة وتصحيحها. وسنستعرض فيما يلي 3 طرق أساسية للمعالجة:

5-1- طريقة تأخير المتغير التابع بفترة واحدة

في الغالب يلجأ الباحثون إلى إدراج المتغير التابع مؤخر بفترة واحدة كمتغير مستقل في النموذج لغرض إزالة الارتباط الذاتي للأخطاء من النموذج.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \boldsymbol{\gamma Y_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$$

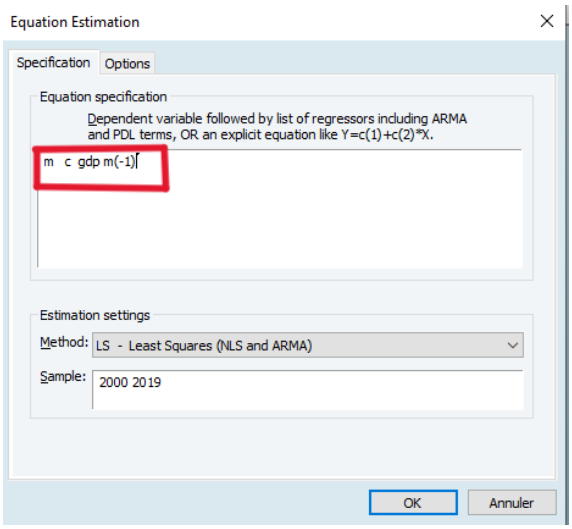
ففي مثالنا السابق، السلسلة تبدأ من سنة 2000 للمتغير التابع والمستقل، يمكن إدخال بيانات المتغير التابع لسنة 1999 مقابل المتغير التابع لسنة 2000. ولكن في أغلب الأحيان لا توجد بيانات لسنة سابقة عن السلسلة المستخدمة في هذه الحالة يمكن للباحث أن يضحي بمشاهدة واحدة في مقابل التخلص من أثر الارتباط الذاتي.

مثال تطبيقي: (نفس المثال السابق)

رأينا سابقا أن عند استخدام اختبار DW أن الارتباط الذاتي موجود، لذلك سوف نقوم بإزالته نستخدم طريقة تأخير المتغير التابع لفترة واحدة

السنة	GDP_t	M_t	M_{t-1}	السنة	GDP_t	M_t	M_{t-1}
2000	506	23.2	-	2010	982.4	58.5	52.9
2001	523.3	23.1	23.2	2011	1063.4	64	58.5
2002	563.8	25.2	23.1	2012	1171.1	75.9	64
2003	594.7	26.4	25.2	2013	1306.6	94.4	75.9
2004	635.7	28.4	26.4	2014	1412.9	131.9	94.4
2005	688.1	32	28.4	2015	1528.8	126.9	131.9
2006	753	37.7	32	2016	1702.2	155.4	126.9
2007	796.3	40.6	37.7	2017	1899.5	185.8	155.4
2008	868.5	47.7	40.6	2018	2127.6	217.5	185.8
2009	935.5	52.9	47.7	2019	2368.5	260.9	217.5

نقوم بتقدير العلاقة التالية $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \boldsymbol{\gamma Y_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$ على eviews كما يلي:



Dependent Variable: M
Method: Least Squares
Date: 11/07/25 Time: 00:17
Sample (adjusted): 2001 2019
Included observations: 19 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-26.93617	10.10539	-2.665526	0.0169
GDP	0.054502	0.021242	2.565810	0.0207
M(-1)	0.692369	0.197459	3.506388	0.0029

R-squared	0.989213	Mean dependent var	88.69474
Adjusted R-squared	0.987865	S.D. dependent var	71.53424
S.E. of regression	7.880195	Akaike info criterion	7.110522
Sum squared resid	993.5596	Schwarz criterion	7.259644
Log likelihood	-64.54996	Hannan-Quinn criter.	7.135759
F-statistic	733.6457	Durbin-Watson stat	2.392572
Prob(F-statistic)	0.000000		

ويظهر من نتائج التقدير أن DW= 2.39 ، هذه القيمة عند مستوى معنوية 5% تقع بين الحدين 2 و4−du عند حجم عينة 19.

$$2 < DW = 2.39 < 4 - du$$

$$2 < 2.39 < 2.6$$

وبذلك نستنتج غياب الارتباط الذاتي للأخطاء.

5-2- طريقة إضافة المتغير الوهمي

وجود الارتباط الذاتي قد يكون نتيجة إهمال بعض المتغيرات المهمة في النموذج. في هذه الطريقة يتم وصف النموذج بإدخال متغيرات تم اهمالها. فعلى سبيل، لنفرض أن الفترة 2005 – 2019 عرفت تحول في الاقتصاد مثل ارتفاع فاتورة الاستيراد (M) مع زيادة في الناتج الداخلي الخام (GDP) نتيجة لارتفاع أسعار البترول، فيمكن إدخال متغير وهمي (Dummy Variable) تكون قيمته مساوية لـ 1 خلال الفترة 2005 – 2019 ومساوية لـ 0 فيما عدا ذلك:

السنة	GDP_t	M_t	DV	السنة	GDP_t	M_t	DV
2000	506	23.2	0	2010	982.4	58.5	1
2001	523.3	23.1	0	2011	1063.4	64	1
2002	563.8	25.2	0	2012	1171.1	75.9	1
2003	594.7	26.4	0	2013	1306.6	94.4	1
2004	635.7	28.4	0	2014	1412.9	131.9	1
2005	688.1	32	1	2015	1528.8	126.9	1
2006	753	37.7	1	2016	1702.2	155.4	1
2007	796.3	40.6	1	2017	1899.5	185.8	1
2008	868.5	47.7	1	2018	2127.6	217.5	1
2009	935.5	52.9	1	2019	2368.5	260.9	1

نتائج التقدير بهذه الطريقة جاءت كما هو مبين في الجدول التالي:

Dependent Variable: M
Method: Least Squares
Date: 11/07/25 Time: 00:49
Sample: 2000 2019
Included observations: 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-51.53581	4.036504	-12.76744	0.0000
GDP	0.135994	0.003871	35.13439	0.0000
DV	-20.72958	4.858886	-4.266323	0.0005

R-squared	0.989823	Mean dependent var	85.42000
Adjusted R-squared	0.988626	S.D. dependent var	71.14985
S.E. of regression	7.588070	Akaike info criterion	7.028513
Sum squared resid	978.8397	Schwarz criterion	7.177873
Log likelihood	-67.28513	Hannan-Quinn criter.	7.057669
F-statistic	826.7355	Durbin-Watson stat	1.561035
Prob(F-statistic)	0.000000		

ومن خلال نتائج التقدير، يتبين أن 2 > DW = 1.56 > du = 1.54 عند 20 مشاهدة وبمستوى معنوية 5%، وهي تقطع في منطقة الرفض، بمعنى غياب الارتباط الذاتي للأخطاء في نتائج التقدير. ويلاحظ أن كل المتغيرات المدرجة معنوية.

5-3- طريقة شبه الفروقات الأولى

تعتمد هذه الطريقة على تحويل البيانات الأصلية إلى بيانات جديدة تمكننا من الحصول على نموذج يكون المتغير العشوائي فيه خاضع لفرضيات تطبيق المربعات الصغرى العادية، وبالتالي يمكن استخدام هذه الطريقة في تقدير المعالم.

في حالة وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء فإننا نستعمل الطريقة التالية للتخلص من هذه المشكلة:

لنفترض أن النموذج الأصلي يأخذ الصيغة التالية (نأخذ نموذج خطي بسيط لتسهيل الفهم)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \dots\dots (1)$$

$$\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + u_i$$

نكتب النموذج في الفترة السابقة:

$$Y_{i-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{i-1} + \varepsilon_{i-1} \dots\dots (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في P والطرح من (1) نحصل على النموذج التالي:

$$Y_i^* = \beta_0(1-\rho) + \beta_1 X_i^* + \varepsilon_{i-1} \dots\dots (3)$$

حيث:

$$Y_i^* = Y_i - \rho Y_{i-1} \dots\dots (4)$$

$$X_i^* = X_i - \rho X_{i-1} \dots\dots (5)$$

$$\mu_i = \varepsilon_i - \rho \varepsilon_{i-1}$$

النموذج المحول يصبح:

$$Y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* X_i^* + \mu_i \dots\dots (6)$$

حيث:

$$\beta_0^* = \beta_0(1-\rho) \quad , \quad \beta_1^* = \beta_1$$

وبذلك يمكننا تحويل النموذج الذي به الارتباط الذاتي إلى نموذج لا يحتوي على ارتباط ذاتي بين الأخطاء وبذلك يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في إيجاد تقديرات المعالم وهي نفس معالم النموذج الأصلي ما عدا

$$\beta o^* = \beta o\ (1 - \rho)$$

يتم تطبيق طريقة المربعات العادية على البيانات المحولة Xi* , Yi* حيث المشاهدة الأولى يتم تعويضها ب $Yi\sqrt{(1-p^2)}$ بالنسبة لـ Yi و $Xi\sqrt{(1-p^2)}$ بالنسبة Xi بينما المشاهدات الأخرى المتبقية فهي الفرق بين المشاهدات الأصلية في كل نقطة زمنية وحاصل ضرب معامل الارتباط في قيمة المتغيرات السابقة كالتالي:

$$Y_i^* = Y_i - \rho Y_{i-1}$$

$$X_i^* = X_i - \rho X_{i-1}$$

والنموذج المقدر سوف يكون من الشكل:

$$Y_i^* = B_0^* + \beta_1^* X^*$$

مثال تطبيقي (معطيات المثال السابق)

السنة	gdp	m	gdp*	m*	السنة	gdp	m	gdp*	m*
2000	506	23,2	371	17,01	2010	982.4	58.5	346,26	22,528
2001	523.3	23.1	179,22	7,324	2011	1063.4	64	395,368	24,22
2002	563.8	25.2	207,956	9,492	2012	1171.1	75.9	447,988	32,38

2003	594.7	26.4	211,316	9,264	2013	1306.6	94.4	510,252	42,788
2004	635.7	28.4	231,304	10,448	2014	1412.9	131.9	521,412	67,708
2005	688.1	32	255,824	12,688	2015	1528.8	126.9	568,028	37,208
2006	753	37.7	285,0,92	15,94	2016	1702.2	155.4	662,616	69,108
2007	796.3	40.6	284,26	14,964	2017	1899.5	185.8	742,004	80,128
2008	868.5	47.7	327,016	20,092	2018	2127.6	217.5	835,94	91,156
2009	935.5	52.9	344,92	20,464	2019	2368.5	260.9	921,732	113

نتائج التقدير بالمتغيرات المحولة جاءت كالتالي:

Dependent Variable: M
Method: Least Squares
Date: 11/07/25 Time: 18:57
Sample: 2000 2019
Included observations: 19

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDP	0.030492	0.024457	1.246771	0.2294
C	17563.89	10308.32	1.703857	0.1066

R-squared	0.083777	Mean dependent var	27517.58
Adjusted R-squared	0.029882	S.D. dependent var	28859.03
S.E. of regression	28424.58	Akaike info criterion	23.44720
Sum squared resid	1.37E+10	Schwarz criterion	23.54661
Log likelihood	-220.7484	Hannan-Quinn criter.	23.46402
F-statistic	1.554439	Durbin-Watson stat	1.509018
Prob(F-statistic)	0.229387		

ومن خلال نتائج التقدير، يتبين أن 1.41 = < 1.5 = DW عند 20 مشاهدة وبمستوى معنوية 5% وبذلك نلاحظ غياب الارتباط الذاتي للأخطاء في نتائج التقدير.