المحور الرابع: الارتباط الذاتي للأخطاء

المحاضرة 4

1- التعريف بالارتباط الذاتي للأخطاء

من بين الافتراضات الكلاسيكية التي وضعناها من قبل التقدير معالم نموذج الانحدار، هو استقلال القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية معينة عن القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية سابقة لها. أي:

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j$$

$$E(\varepsilon'\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_3) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & \sigma^2 & E(\varepsilon_2\varepsilon_3) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_3\varepsilon_1) & E(\varepsilon_3\varepsilon_2) & \sigma^2 & \dots & E(\varepsilon_3\varepsilon_N) \\ . & . & . & \dots & . \\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & E(\varepsilon_N\varepsilon_3) & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

وإذا تم إسقاط هذا الافتراض فإن ذلك يدل على وجود ما يسمى بالارتباط الذاتي حيث أن مصفوفة التباينات –التباينات المشتركة $E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega_\varepsilon \neq \sigma_\varepsilon^2 I$ لا تحتوي على الصفر خارج القطر الأول وكنتيجة لذلك سنتحصل على مقدرات متحيزة وتباينها ليس هو الأقل.

2- أسباب الارتباط الذاتي للأخطاء واثاره

ينشا الارتباط الذاتي للأخطاء لعدة أسباب منها:

- إهمال بعض المتغيرات التفسيرية في النموذج المراد تقديره.
- الصياغة الرياضية الخاطئة للنموذج.
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية.
- طبيعة بيانات السلاسل الزمنية: طبيعة بيانات السلاسل الزمنية، فمن المعلوم أن بعض متغيرات السلاسل الزمنية كالناتج المحلي الإجمالي GROSS، معدلات البطالة، الأرقام القياسية للأسعار وغيرها غالبا ما تتغير معا في فترات الرخاء وفترات الركود الاقتصادي ولذلك من المتوقع أن نواجه مشكلة الارتباط الذاتي في حالة بناء نموذج

يتضمن مثل هذه المتغيرات.

أما وجوده يؤثر سلبا على نتائج المربعات الصغرى العادية من حيث:

- القيم المقدرة للمعاملات سوف تكون غير متحيزة.
- تباين القيم المقدرة المعاملات النموذج سوف لا يكون أقل ما يمكن.

3- طرق الكشف عن ظاهرة الارتباط الذاتي

للكشف عن وجود هذا المشكل يتعين علينا التمييز بين درجات الارتباط الذاتي كما يلي:

أولا: اختبارات الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى:

للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى هناك العديد من الاختبارات، لعل أهمها ما يلي:

1-1- اختبار DURBIN WATSON:

يعتبر هذا الاختبار أكثر الاختبارات استخداما في مختلف العينات، لأنه سهل وبسيط الفكرة والتطبيق، مع الاشارة إلى أنه مخصص للكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط.

اختبار DW يستخدم لاختبار ثلاث فروض كما يلي:

- وجود ارتباط ذاتي موجب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي: $\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho > 0 \end{cases}$
- وجود ارتباط ذاتي سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي: $\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho < 0 \end{cases}$
- وجود ارتباط ذاتي موجب او سالب، فيأخذ الاختبار الشكل التالي: $\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$

إحصائيةDW تعطى بالعلاقة التالية:

$$DW = \sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n} e_t^2$$

او اختصارا بالعلاقة التالية:

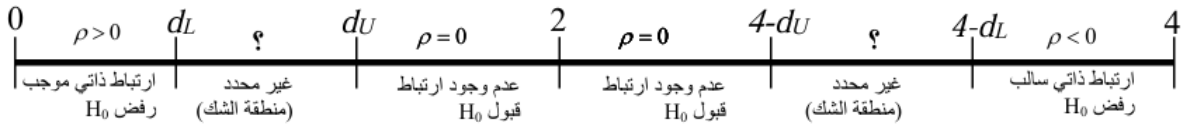
$$DW = 2(1 - \rho)$$

الإحصائية DW تمثل القيمة المحسوبة للاختبار حيث برنامج EViews يقوم بحساب هذه الإحصائية بطريقة أوتوماتيكية وتأخذ قيما محصورة بين 0 و4. ويبقى على الباحث سوى مقارنة هذه القيمة المحسوبة مع القيمتين الجدوليتين.

يوضح الشكل التالي القيم المجدولة للاختبار dl التي تمثل الحد الأدنى لانعدام الارتباط الذاتي، وdu التي تمثل الحد الأقصى لانعدام الارتباط الذاتي، وذلك حسب عدد المشاهدات، وعدد المتغيرات التفسيرية في النموذج عند درجة معنوية 5%.

وتوجد قيم كل من الحدين الأعلى والأدنى في الجدول الإحصائي لتوزيع دربن واتسون .

الشكل رقم (1): مناطق القبول والرفض لاختبار Durbin-Watson



dl >DW> 0 وجود ارتباط ذاتي موجب

du >DW> dl مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

du < DW < 4 − du عدم وجود ارتباط ذاتي.

4 − du < DW < 4 − dl مجال غير محسوم، هناك شك في وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي.

4− dl < DW < 4 وجود ارتباط ذاتي سالب

1-2- شروط اختبار DURBIN WATSON:

لا يمكن استعمال اختبار Durbin Watson إلا في ظل الشروط التالية:

- يجب أن يكون النموذج متضمنا للمعلم الثابت B.

- يجب ألا يظهر المتغير التابع في جملة المتغيرات المستقلة بفترات إبطاء.

- اختبار دربن واتسون يختبر الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى فقط أي يفحص هذا الاختبار الارتباط الذاتي بين الخطأ العشوائي الحالي والخطأ في الفترة الزمنية السابقة مباشرة لا يمكنه اكتشاف الارتباطات من درجات أعلى مثل الارتباط بين الخطأ الحالي والخطأ في فترتين أو أكثر قبلها.

- حجم العينة يجب أن يساوي أو يفوق 15 مشاهدة (n≥15)، لأن القيم الجدولية لهذا الاختبار تبدأ من 15 مشاهدة.

مثال تطبيقي: البيانات التالية خاصة بتطور كل من الناتج المحلي الإجمالي (GDP) والواردات (M) في اقتصاد ما بالمليار دينار خلال الفترة 2000-2019 كما يلي:

الواردات	الناتج المحلي الاجمالي	السنة	الواردات	الناتج المحلي الاجمالي	السنة
58.5	982.4	2010	23.2	506	2000
64	1063.4	2011	23.1	523.3	2001
75.9	1171.1	2012	25.2	563.8	2002
94.4	1306.6	2013	26.4	594.7	2003
131.9	1412.9	2014	28.4	635.7	2004
126.9	1528.8	2015	32	688.1	2005
155.4	1702.2	2016	37.7	753	2006
185.8	1899.5	2017	40.6	796.3	2007
217.5	2127.6	2018	47.7	868.5	2008
260.9	2368.5	2019	52.9	935.5	2009

المطلوب:

1- تقدير انحدار الناتج المحلي الإجمالي على الواردات على افتراض أن العلاقة خطية.
2- اختبار وجود الارتباط الذاتي من عدمه باستخدام اختبار DW.

الحل:

2-1- نتائج التقدير:

Dependent Variable: M
Method: Least Squares
Date: 11/05/25 Time: 09:48
Sample: 2000 2019
Included observations: 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-56.13319	5.439948	-10.31870	0.0000
GDP	0.126230	0.004365	28.91680	0.0000

R-squared	0.978927	Mean dependent var	85.42000
Adjusted R-squared	0.977756	S.D. dependent var	71.14985
S.E. of regression	10.61147	Akaike info criterion	7.656388
Sum squared resid	2026.861	Schwarz criterion	7.755962
Log likelihood	-74.56388	Hannan-Quinn criter.	7.675826
F-statistic	836.1815	Durbin-Watson stat	0.647239
Prob(F-statistic)	0.000000		

2-2- اختبار وجود الارتباط الذاتي

تظهر من نتائج التقدير أن DW = 0.64 ، بمقارنة هذه القيمة مع القيمتين الجدوليتين لـ dl و du عند حجم عينة n = 20 نجد:

$$DW = 0.64 < dl = 1.20$$

وبذلك يوجد إرتباط ذاتي للأخطاء في هذه البيانات سوف نقوم بمعالجته (تصحيحه) فيما بعد.

ثانيا: اختبارات الارتباط الذاتي من الدرجة الأعلى:

2-1- اختبار Breusch-Godfrey:

يرتكز هذا الاختبار على مضاعف لاغرانج والذي يسمح باختبار وجود ارتباط ذاتي من درجة أكبر من الواحد. نموذج الانحدار الذاتي للأخطاء من الدرجة p يكتب على الشكل التالي:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

بالتعويض في النموذج الخطي المتعدد حيث أن الأخطاء مرتبطة ذاتيا نجد:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \ldots + \beta_k X_{tk} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

وتكون فرضية استقلالية الأخطاء (عدم وجود ارتباط ذاتي) كما يلي:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p = 0$$

إحصائية هذا الاختبار تعتمد على مضاعف لاغرانج والتي تكون مساوية إلى:

$$LM = (n - p) \times R^2 \rightarrow \chi^2_p$$

LM يسمى مضاعف لاغرانج Lagrange Multiplier test ويتبع توزيعة الكاي مربع بدرجة حرية p.

R^2 هو معامل التحديد.

قاعدة القرار: إذا كانت LM أكبر من القيمة المجدولة لتوزيع الكاي عند مستوى معنوية ودرجة حرية فإننا نرفض فرضية العدم Ho وبالتالي يوجد ارتباط في الأخطاء من الدرجة p.

مثال تطبيقي: نفس المعطيات السابقة

3- اختبر فرضية وجود ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الثانية بشرط استخدام اختبار BREUSCH-GODFREY للارتباط التسلسلي.

الحل:

نستخدم التعليمة التالية:

$$Table\ Estimation \rightarrow View \rightarrow Residual\ Diagnostics \rightarrow Serial\ Correlation\ LM\ test \rightarrow lags\ to\ include\ [2] \rightarrow ok$$

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:
Null hypothesis: No serial correlation at up to 2 lags

F-statistic	5.659529	Prob. F(2,16)	0.0138
Obs*R-squared	8.286565	Prob. Chi-Square(2)	0.0159

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 11/05/25 Time: 10:41
Sample: 2000 2019
Included observations: 20
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-4.198297	4.659603	-0.900999	0.3810
GDP	0.004483	0.003876	1.156721	0.2644
RESID(-1)	0.554432	0.259296	2.138223	0.0483
RESID(-2)	0.284236	0.275287	1.032506	0.3172

R-squared	0.414328	Mean dependent var	2.47E-14
Adjusted R-squared	0.304515	S.D. dependent var	10.32845
S.E. of regression	8.613489	Akaike info criterion	7.321392
Sum squared resid	1187.075	Schwarz criterion	7.520539
Log likelihood	-69.21392	Hannan-Quinn criter.	7.360268
F-statistic	3.773019	Durbin-Watson stat	1.779014
Prob(F-statistic)	0.031944		

ويتضح من خلال نتائج الاختبار، أن هذا الاختبار على برمجية EVIEWS يقوم ببناء نموذج انحدار البواقي على الناتج المحلي الإجمالي والبواقي المبطئة بفترتين متتاليتين(كما هو مبين في الجزء السفلي). ومن نتائج النموذج في الجزء العلوي، جاءت قيمة إحصائية LM = 8.286565. أما القيمة الجدولية لـ مربع كاي بدرجة واحدة عند مستوى معنوية 5% فهي: x = 3.83 وبذلك LM > X وبالتالي نقبل الفرضية H1، أي وجود ارتباط ذاتي تسلسلي من الدرجة الثانية.

2-2-اختبار Ljung – Box

هو اختبار إحصائي يستخدم في التحقق من وجود الارتباط الذاتي في سلسلة زمنية. يُستخدم اختبار – Ljung Box على نطاق واسع في الاقتصاد القياسي وفي المجالات الأخرى التي تكون فيها بيانات السلاسل الزمنية شائعة. يعتمد هذا الاختبار في حسابه على شكل بياني يسمى Correlogram معاملات الارتباط الذاتي بين البواقي مع فجوات زمنية).

يقوم هذا الاختبار باختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0; & \text{البواقي مستقلة (لا يوجد ارتباط تسلسلي)} \\ H_1; & \text{البواقي مترابطة(يوجد ارتباط تسلسلي)} \end{cases}$$

تعطى احصائية الاختبار بالصيغة التالية:

$$Q\text{-}Stat = n(n+2)\frac{\Sigma AC^2}{n-k}$$

حيث:

n : حجم العينة

AC : الارتباط الذاتي في الفترة k

تتبع إحصائية Ljung – Box توزيع مربع كاي بدرجة حرية h

$$Q - Stat \backsim \chi_h^2$$

قاعدة القرار: نرفض الفرضية H0 إذا كان X_h^2 < Q- Stat، اي يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء.

مثال تطبيقي: (نفس المثال السابق)

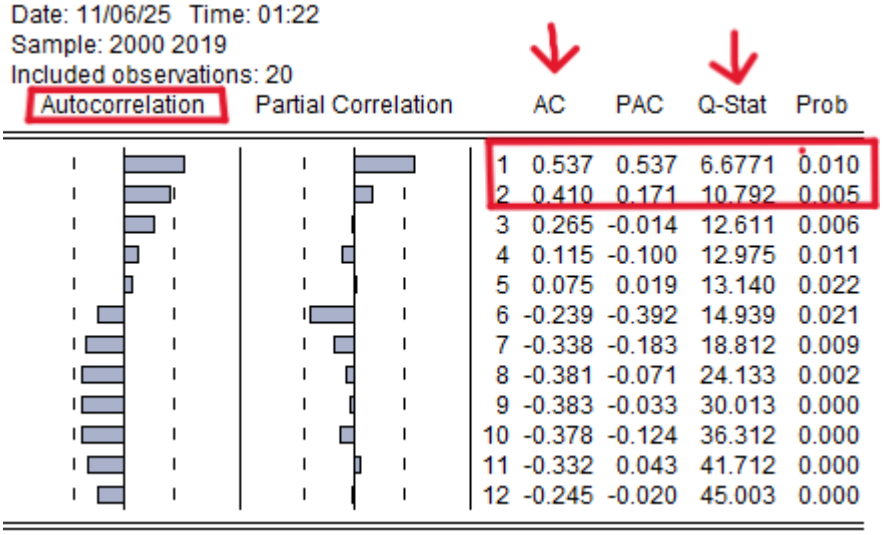
اختبر فرضية وجود الارتباط الذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى والثانية باستخدام اختبار Ljung-Box

الحل:

نستخدم التعليمة التالية:

Table Estimation → View → Residual Diagnostics → Correlogram – Q- statistics → ok

Date: 11/06/25 Time: 01:22
Sample: 2000 2019
Included observations: 20



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.537	0.537	6.6771	0.010
		2	0.410	0.171	10.792	0.005
		3	0.265	-0.014	12.611	0.006
		4	0.115	-0.100	12.975	0.011
		5	0.075	0.019	13.140	0.022
		6	-0.239	-0.392	14.939	0.021
		7	-0.338	-0.183	18.812	0.009
		8	-0.381	-0.071	24.133	0.002
		9	-0.383	-0.033	30.013	0.000
		10	-0.378	-0.124	36.312	0.000
		11	-0.332	0.043	41.712	0.000
		12	-0.245	-0.020	45.003	0.000

$$Q\text{–}Stat = n(n+2)\frac{\Sigma AC^2}{n-k}$$

اختبار الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى:

القيمة المحسوبة:

$$\Rightarrow Q - Stat = 6.6771 = 20(22)\frac{(0.537)^2}{19}$$

القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5%: $X_h^2 = X_1^2 = 3.841$

القرار: القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية، وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية، أي أنه يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الأولى.

اختبار الارتباط الذاتي من الدرجة الثانية:

القيمة المحسوبة:

$$\Rightarrow 10.792 = 20(22)\frac{(0.537)^2 + (0.410)^2}{18}$$

القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5%: $X_h^2 = X_2^2$=5.991

القرار: القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية، وبالتالي نرفض الفرضية الصفرية، أي أنه يوجد ارتباط ذاتي للأخطاء من الدرجة الثانية.

وما يدعم قرار وجود ارتباط ذاتي للأخطاء هو أن قيم معاملات الارتباط الذاتي تتناقص ببطء وتقترب من 0 بزيادة طول الفجوات.