Or : $\Phi(x.x') \leq \Phi(x).\Phi(x')$; donc :

$$R(p.p') \leq R(p).R(p').$$

* Si le système en parallèle alors : $\Phi(x \amalg x') = \Phi(x) \amalg \Phi(x')$, donc $R(p \amalg p') = R(p) \amalg R(p')$.

Réciproquememt, si $R(p \amalg p') = R(p) \amalg R(p')$, alors :

$$\sum_{x} \sum_{x'} [\Phi(x \amalg x') - \Phi(x) \amalg \Phi(x')] P[X = x] P[X' = x'] = 0.$$

et si p et $p' \in]0.1[^n$ alors $P[X = x] > 0$ et $P[X' = x'] > 0$, on a nécessairement : $\Phi(x \amalg x') = \Phi(x) \amalg \Phi(x')$, et par conséquent le système est en parallèle.

* On raisonne de la même façon pour $R(p.p') \leq R(p).R(p')$. On conclue que le système est en série

3.2.2 Système aléatoires à composants formant une Chaine de markov

On suppose que le système est formé de n composants indépendants, l'état du $i^{ème}$ composant est décrit par une variable aléatoire X_i. On note $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ où les variables aléatoires X_i, $i = 1, 2, ..., n$, forment une Chaine de Markov homogène c'est à dire l'état du $i^{ème}$ composant dépend seulement de l'état du $(i-1)^{ème}$ composant pour $i = 2, 3, ..., n$ Alors dans ce cas on définit les probabilités de transition suivantes :

- $p_{00} = P(X_i = 0/X_{i-1} = 0)$
- $p_{11} = P(X_i = 1/X_{i-1} = 1)$
- $p_{01} = 1 - p_{00} = P(X_i = 1/X_{i-1} = 0)$
- $p_{10} = 1 - p_{11} = P(X_i = 0/X_{i-1} = 1)$
- La loi initiale $(q_1, p_1) = (P(X_1 = 0), P(X_1 = 1))$ avec $q_1 = 1 - p_1$
- La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$

* La fiabilité du système est donnée par :

$$P\left[\Phi\left(X\right)=1\right]=R=E\left[\Phi\left(X\right)\right].$$

et dans ce cas R dépend de q_1, p_1, p_{00} et p_{10}.

Exemple 3.2.2. *Calculer la fiabilité d'un système en série dont les composants forment une chaine de Markov homogène*

On a

$$\begin{aligned} R &= P\left[\Phi\left(X\right)=1\right]=P\left[\min_{1\leq i\leq n} X=1\right]=P\left[X_1=X_2=...=X_n=1\right] \\ &= P\left[X_1=1\right]P\left[X_2=1/X_1=1\right]....P\left[X_n=1/X_{n-1}=1\right] \\ &= p_1p_{11}p_{11}...p_{11}=p_1\left(p_{11}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice 3.2.1. *Calculer la fiabilité et l'importance en fiabilité des composants pour les systèmes suivants*

* *"2-consécutifs-sur-3 : F"*

* *"2-consécutifs-sur-3 : G"*