Définition 3.2.1. ***(Importance moyenne ou en fiabilité)*** *Soit Φ une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants non nécessairement indépendants, alors l'importance moyenne (en fiabilité) du $i^{\text{ème}}$ composant est définie par :*

$$I_R\ (i) = E\left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right] \quad , \ pour \ \ i = 1.2.3\ldots\ldots.n.$$

Définition 3.2.2. *Si Φ est une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants indépendants, alors l'importance moyenne (en fiabilité) du $i^{\text{ème}}$ composant est donnée par :*

$$I_R\ (i) = \frac{\partial R(p)}{\partial p_i}, \ \ pour \ \ i = 1, 2, ..., n \ \ ; \, avec \ \ p = (p_1, p_2, \ldots p_n).$$

Proposition 3.2.1. *Dans le cas d'une structure cohérente d'ordre n, ayant des composants indépendants, les deux définitions précédentes sont équivalentes.*

Démonstration :

On peut écrire $R(p)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} R(p) &= P\left[\Phi\left(X\right) = 1\right] = P\left[\left\{\Phi\left(X\right) = 1\right\} \cap \left\{X_j = 1\right\}\right] + P\left[\left\{\Phi\left(X\right) = 1\right\} \cap \left\{X_j = 0\right\}\right] \\ &= P\left[\Phi\left(X\right) = 1/X_j = 1\right] P\left[X_j = 1\right] + P\left[\Phi\left(X\right) = 1/X_j = 0\right] P\left[X_j = 0\right] \\ &= P\left[\Phi\left(1_j, X\right) = 1\right] p_j + P\left[\Phi\left(0_j, X\right) = 1\right] \left(1 - p_j\right) \\ &= p_j R\left(1_j, p\right) + \left(1 - p_j\right) R\left(0_j, p\right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_R(i) &= E\left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right] = R\left(1_i, p\right) - R\left(0_i, p\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_i}\left[p_j\ R\left(1_i, p\right) + \left(1 - p_i\right) R\left(0_i, p\right)\right] \\ &= \frac{\partial R(p)}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2. *On a :*

1. *$R(p)$ est un fonction multilinéaire. Si $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, alors $R(p)$ est un polynôme en p.*

2. *Si* $p_i = \frac{1}{2}$ *pour tout i,* $i = 1, 2, \ldots, n,$ *alors :*

$$I_R(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_x \left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right].$$

L'importance en fiabilité coïncide avec l'importance de structure.

3. *Si :* $0 < p_i < 1$ *pour tout i,* $i = 1, 2, ..., .n,$ *alors :*

$$0 < I_R(i) < 1.$$

Exemple 3.2.1. ***Structure "k-sur-n : G"*** *si les composants du système sont indépendants alors :*

** La fonction de fiabilité s'écrit :*

$$\begin{aligned} R(p) &= P\left[1_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \geq k} = 1\right] = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right] \\ &= \sum p_{i_1}.p_{i_2}.....p_{i_m}\left(1 - p_{i_{m+1}}\right).....\left(1 - p_{i_n}\right), \end{aligned}$$

la somme porte sur toutes les partitions $\{i_1, i_2, ..., i_m\}$ *et* $\{i_{m+1}, i_{m+2}, ..., i_n\}$ *de l'ensemble* $\{1, 2, ...n\}$ *en deux ensembles disjoints où* $m \geq k$.

** L'importance en fiabilité du* $i^{\text{ème}}$ *composant est donnée par :*

$$I_R(i) = \frac{\partial R(p)}{\partial p_i} = \sum p_{i_1}.p_{i_2}.....p_{i_{k-1}}\left(1 - p_{i_{k+1}}\right).....\left(1 - p_{i_n}\right),$$

où $\{i_1, i_2, ..., i_{k-1}\}$ *et* $\{i_{k+1}, i_{m+2}, ..., i_n\}$ *est une partition de l'ensemble* $\{1, 2, ..., i-1, i+1, ...n\}$.

** Dans le cas ou les composants sont identiquement distribués c.à.d* $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ *alors :*

** La fonction de fiabilité s'écrit :*

$$\begin{aligned} R(p) &= P\left[\Phi(X)=1\right] = P\left[1_{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k} = 1\right] = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right] \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \end{aligned}$$

a) Lorsque k=1 (structure en parallèle)** alors **:

$$R(p) = 1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n) \quad et \quad I_R(i) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (1-p_j)$$

Si en outre $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, alors : $I_R(1) < I_R(2) < \ldots < I_R(n)$, le composant qui a la plus grande fiabilité est le plus important.

b) Lorsque k=n (structure en série)** alors **:

$$R(p) = \prod_{i=1}^{n} p_i \; et \; I_R(i) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_j$$

Si en outre $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$, alors : $I_R(1) > I_R(2) > \ldots > I_R(n)$, le composant qui a la plus petite fiabilité est le composant le plus important.

Théorème 3.2.1. *La fonction de fiabilité $R(p)$ d'une structure cohérente d'ordre n est strictement croissante pour $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ dans $]0.1[^n$.*

Démonstration :

On sait que : $R(p) = p_j R(1_j, p) + (1-p_j) R(0_j, p)$, pour $1 \leq j \leq n$; donc :

$$\frac{\partial R(p)}{\partial p_i} = R(1_i, p) - R(0_i, p) = E\left[\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x)\right].$$

Comme $\Phi(x)$ est une fonction croissante alors :

$$\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x) \geq 0 \text{ pour tout } x.$$

En outre il existe x^0 tel que $\Phi\left(1_i, x^0\right) - \Phi\left(0_i, x^0\right) = 1$, puisque chaque composant est utile, x^0 existe avec une probabilité strictement positive car $p \in \left]0.1\right[^n$. On déduit donc :

$$E\left[\Phi\left(1_i, x\right) - \Phi\left(0_i, x\right)\right] > 0.$$

Par conséquent $R(p)$ est une fonction strictement croissante par rapport à chaque des coordonnées $p = (p_1, p_2, \dots p_n)$.

Théorème 3.2.2. *Si $R(p)$ est la fonction de fiabilité d'une structure cohérente Φ, alors pour tout p et $p' \in [0.1]^n$:*

(i) $R\left(p \amalg p'\right) \geq R(p) \amalg R(p')$,

(ii) $R\left(p.p'\right) \leq R(p).R(p')$,

On a l'égalité dans (i) si et seulement si la sructure Φ est en parallèle.

On a l'égalité dans (ii) si et seulement si la sructure Φ est en série.

Démonstration :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$; $X_1', X_2', ..., X_n'$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes avec $P\left[X_i = 1\right] = p_i$, $P\left[X_i' = 1\right] = p_i'$, alors :

(i)

$$R\left(p \amalg p'\right) - R(p) \amalg R(p') = \sum_x \sum_{x'} \left[\Phi\left(x \amalg x'\right) - \Phi(x) \amalg \Phi(x')\right] P\left[X = x\right] P\left[X' = x'\right] \geq 0,$$

car :

$$E\left[\Phi\left(x \amalg x'\right)\right] - E\left[\Phi(x)\right] \amalg E\left[\Phi(x')\right] = E\left[\Phi\left(x \amalg x'\right) - \Phi(x) \amalg \Phi(x')\right],$$

et on sait que : $\Phi\left(x \amalg x'\right) \geq \Phi(x) \amalg \Phi(x')$; donc :

$$R\left(p \amalg p'\right) \geq R(p) \amalg R(p').$$

(ii)

$$R\left(p.p'\right) - R(p).h(p') = \sum_x \sum_{x'} \left[\Phi\left(x.x'\right) - \Phi(x).\Phi(x')\right] P\left[X = x\right] P\left[X' = x'\right].$$