

CHAPITRE 3. FIABILITÉ DES SYSTÈMES COHÉRENTS

3.1. PROPRIÉTÉS DÉTERMINISTES DES SYSTÈMES COBINAIRES

1. La formule de Φ en fonction des liens minimaux :

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^d \prod_{i \in L_j} x_i = \max_{1 \leq i \leq d} \min_{i \in L_j} x_i$$

où d est le nombre de liens minimaux.

2. La formule de Φ en fonction des coupes minimales :

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in C_j} x_i = \min_{1 \leq i \leq k} \max_{i \in C_j} x_i$$

où k : est le nombre de coupes minimales.

Démonstration

*Soit d le nombre de liens minimaux notés $L_1, L_2, \dots, L_d$ alors au $j^{\text{ème}}$ lien minimal on peut associer la fonction de structure $\rho_j(x) = \prod_{i \in L_j} x_i = \min_{i \in L_j} x_i$, puisque dans un lien les composants sont disposés en série. Donc

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^d \rho_j(x) = \prod_{j=1}^d \prod_{i \in L_j} x_i = \max_{1 \leq i \leq d} \min_{i \in L_j} x_i$$

*Soit k le nombre de coupes minimales notés $C_1, C_2, \dots, C_k$ alors à la $j^{\text{ème}}$ coupe minimale on peut associer la fonction de structure $k_j(x) = \prod_{i \in C_j} x_i = \max_{i \in C_j} x_i$, puisque dans une coupe les composants sont disposés en parallèle. Donc

$$\Phi(x) = \prod_{j=1}^k k_j(x) = \prod_{j=1}^k \prod_{i \in C_j} x_i = \min_{1 \leq i \leq k} \max_{i \in C_j} x_i$$

Exemple 3.1.2. (Structure de pont) Soit la structure suivante

- Les liens minimaux sont les suivants : $L_1 = \{\{1, 2\}, L_2 = \{3, 4\}, L_3 = \{1, 5, 4\}, L_4 = \{3, 5, 2\}\}$.
- Les coupes minimales sont : $C_1 = \{\{1, 3\}, C_2 = \{2, 4\}, C_3 = \{1, 5, 4\}, C_4 = \{3, 5, 2\}\}$

D'après la proposition précédente, on peut écrire la fonction de structure en fonction des liens minimaux comme suivant :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \max_{1 \leq j \leq 4} \min_{i \in L_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^4 \left(1 - \prod_{i \in L_j} x_i\right) \\ &= 1 - (1 - x_1 x_2) (1 - x_3 x_4) (1 - x_1 x_5 x_4) (1 - x_3 x_5 x_2).\end{aligned}$$

Où en fonction des coupes minimales

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \min_{1 \leq i \leq k} \max_{i \in C_j} x_i = \prod_{j=1}^4 \prod_{i \in C_j} x_i = \prod_{j=1}^4 \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)\right) \\ &= (1 - (1 - x_1) (1 - x_3)) (1 - (1 - x_2) (1 - x_4)) (1 - (1 - x_1) (1 - x_5) (1 - x_4)) (1 - (1 - x_3) (1 - x_5) (1 - x_2)).\end{aligned}$$

Exercice 3.1.3. Déterminer les coupes minimales et les liens minimaux des systèmes usuels précédents.

3.1.6 Importance de structure des composants

Dans un système cohérent donné certains composants, de part leurs positions dans la configuration structurale de celui-ci, sont plus importants que d'autres dans le fonctionnement du système. Par exemple dans une structure en série ou en parallèle tous les composants ont la même importance.

Supposons connu le vecteur $(\cdot, x)$. Alors :

$$\text{si } \Phi(1_i, x) = 1 \text{ et } \Phi(0_i, x) = 0, \text{ soit } \Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x) = 1$$

On peut considérer le $i^{\text{ème}}$ composant plus important que si on avait :

$$\Phi(1_i, x) = 0 = \Phi(0_i, x) \text{ ou } \Phi(1_i, x) = 1 = \Phi(0_i, x).$$

CHAPITRE 3. FIABILITÉ DES SYSTÈMES COHÉRENTS

3.1. PROPRIÉTÉS DÉTERMINISTES DES SYSTÈMES COBINAIRES

Dans le premier cas le $i^{\text{ème}}$ composant détermine quant le système fonctionne ou non, alors que dans le dernier cas il n'est pas conséquent. Dans la première situation le vecteur $(1_i, x)$ est appelé "vecteur-lien critique", pour le $i^{\text{ème}}$ composant et l'ensemble correspondant $L_1(1_i, x)$ s'appelle "lien critique" pour le $i^{\text{ème}}$ composant.

Définition 3.1.13. Dans une structure cohérente Φ l'importance de structure du $i^{\text{ème}}$ composant est donnée par :

$$I_{\Phi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{x; x_i=1\}} [\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x)]$$

* $n_{\Phi}(i) = \sum_{\{x; x_i=1\}} [\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x)]$ est le nombre de liens critiques pour le composant i , c'est aussi le nombre de vecteurs -liens critiques pour le composant i . le terme 2^{n-1} provient du fait qu'il y'a 2^{n-1} possibilités d'écrire le vecteur $(1_i, x) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Remarque 3.1.6. * $I_{\Phi}(i)$ est une proportion. ($0 < I_{\Phi}(i) < 1$)

Exemple 3.1.3. Soit le système "**k-sur-n : G**".

on a $\Phi(x) = 1$ si et seulement si au moins k coordonnées du vecteur x valent 1, donc :

$$\Phi(1_i, x) - \Phi(0_i, x) = 1_{[x_1+x_2+\dots+x_{i-1}+x_{i+1}+\dots+x_n=k-1]},$$

Cela vaut 1 pour C_{n-1}^{k-1} valeurs de $(1_i, x)$, d'où : $I_{\Phi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} C_{n-1}^{k-1}$, pour tout composant i .

* On peut vérifier que pour une structure en série ($k = n$) ou pour une structure en parallèle ($k = 1$) tous les composants ont la même importance de structure qui vaut : $I_{\Phi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

Exercice 3.1.4. * Soit la structure de fonction : $\Phi(x) = x_1 \cdot (x_2 \cup x_3)$ Montrer que

$$I_{\Phi}(1) = \frac{3}{4}, I_{\Phi}(2) = \frac{1}{4} \text{ et (par symétrie) } I_{\Phi}(3) = \frac{1}{4}.$$

3.2 Propriétés des Systèmes Aléatoires

Ici on précise d'abord la notion de fonction de fiabilité d'un système cohérent, ensuite on établit ses propriétés importantes, on introduit aussi la notion de variables aléatoires « associées » très utilisé pour démontrer des inégalités sur la fiabilité des systèmes (ou sous-systèmes tels que liens minimaux et coupes minimales) à composants non indépendants.

3.2.1 Systèmes aléatoires à composants indépendants

On suppose que le système est formé de n composants indépendants, l'état du $i^{\text{ème}}$ composant est décrit par une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p_i . On note $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ où les variables aléatoires X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sont supposés indépendantes. Alors on a :

* La fiabilité du $i^{\text{ème}}$ composant est :

$$P[X_i = 1] = p_i = E(X_i)$$

* La fiabilité du système est donnée par :

$$P[\Phi(X) = 1] = R = E[\Phi(X)].$$

Les composants du système étant supposés indépendants (les v.a X_i indépendantes, $i = 1, 2, \dots, n$) alors on peut écrire :

$$R = R(p_1, p_2, \dots, p_n) = R(p)$$

* La fonction $R(p)$ s'appelle " **fonction de fiabilité** " de la structure Φ .

* Lorsque $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, on note également $R(p)$.

Remarque 3.2.1. Dans le cas des systèmes à composants non indépendants on ne peut pas utiliser la notation $R(p)$ pour désigner la fonction de fiabilité parce que R ne dépend pas uniquement de $p_1, p_2, \dots, p_n$.