

CHAPITRE 3. FIABILITÉ DES SYSTÈMES COHÉRENTS

3.1. PROPRIÉTÉS DÉTERMINISTES DES SYSTÈMES COBINAIRES

Mais $1_{\{1\}}(x_i) = x_i$ et $1_{\{0\}}(x_i) = (1 - x_i)$, donc :

$$\Phi(x) = x_i \Phi(1_i, x) + (1 - x_i) \Phi(0_i, x)$$

Exemple 3.1.1. Soit la fonction de structure $\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2) = x_1, x_2$. C'est la fonction de structure d'un système en série d'ordre 2. Alors on a la décomposition pivotale

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) &= x_1 (1 - x_1)^0 x_2 (1 - x_2)^0 1 + x_1 (1 - x_1)^0 x_2^0 (1 - x_2) 0 \\ &\quad + x_1^0 (1 - x_1) x_2 (1 - x_2)^0 0 + x_1^0 (1 - x_1) x_2^0 (1 - x_2) 0 \\ &= x_1, x_2 \end{aligned}$$

Définition 3.1.7. (Fonction Duale) Si Φ est une fonction de structure d'ordre n , sa dual Φ^D est la fonction donnée par :

$$\Phi^D(x) = 1 - \Phi(1 - x), \text{ où } 1 - x = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n).$$

Exercice 3.1.1. *Montrer qu'un système en parallèle d'ordre n est dual d'un système en série d'ordre n et réciproquement

*Montrer qu'une structure "**k-sur-n : G**" est duale de la structure "**(n-k+1)-sur-n : G**".

3.1.3 Structures cohérentes

Ici on s'intéresse aux systèmes dit «cohérents». Les conditions de cohérence consistent à écarter tout système physique dont l'état ne dépend pas des états de ses composants et qui fonctionne avec un composant eu panne et tombe eu panne après réparation de ce composant. En effet, un tel système ne présente aucun intérêt dans la pratique.

Définition 3.1.8. Un système est cohérent si et seulement si :

(i) $\Phi(x)$ est croissante par rapport à chaque coordonnée x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

(ii) chaque composant est utile ; c'est à dire :

$$\forall i, \exists (\bullet_i, x) ; tq \quad \Phi(1_i, x) = 1 \quad \text{et} \quad \Phi(0_i, x) = 0.$$

Exercice 3.1.2. Montrer que les systèmes en série, en parallèle et **k-sur-n** : **G**" sont cohérents.

Théorème 3.1.1. Soit Φ une structure cohérente d'ordre n , Alors :

- (i) $\Phi(0) = \Phi(0, 0, \dots, 0) = 0$, et $\Phi(1) = \Phi(1, 1, \dots, 1) = 1$.
- (ii) $\prod_{i=1}^n x_i \leq \Phi(x) \leq \prod_{i=1}^n x_i$.

Démonstration :

(i) chaque composant étant utile donc pour tout $i, i = (1, 2, \dots, n)$ il existe un vecteur $(\bullet_i, x)$ tel que $\Phi(1_i, x) = 1$ et $\Phi(0_i, x) = 0$, comme Φ est croissante alors :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &\leq \Phi(0_i, x) = 0 && \text{c'est à dire : } \Phi(0) = 0, \\ \Phi(1) &\geq \Phi(1_i, x) = 1 && \text{c'est à dire : } \Phi(1) = 1, \end{aligned}$$

(ii) Supposons $\prod_{i=1}^n x_i = 1$, Alors $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$,

Donc $\Phi(x) = 1$; et par conséquent $\prod_{i=1}^n x_i \leq \Phi(x)$.

Supposons $\prod_{i=1}^n x_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = 0$, Alors $x_i = 0, \forall i, i = 1, 2, \dots, n$.

Donc $\Phi(x) = 0$; et par conséquent $\Phi(x) \leq \prod_{i=1}^n x_i$.

Théorème 3.1.2. Soit Φ une fonction de structure cohérente alors :

- (i) $\Phi(x \amalg y) \geq \Phi(x) \amalg \Phi(y)$,
- (ii) $\Phi(x.y) \leq \Phi(x). \Phi(y)$,

On a l'égalité dans (i) ssi la structure est en parallèle.

On a l'égalité dans (ii) ssi la structure est en série.

CHAPITRE 3. FIABILITÉ DES SYSTÈMES COHÉRENTS
3.1. PROPRIÉTÉS DÉTERMINISTES DES SYSTÈMES COBINAIRES

Démonstration :

(i) Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x_i \amalg y_i \geq x_i$ et $x_i \amalg y_i \geq y_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, et Φ étant croissante donc :

$$\Phi(x \amalg y) \geq \Phi(x) \text{ et } \Phi(x \amalg y) \geq \Phi(y), \implies$$

$$\Phi(x \amalg y) \geq \max(\Phi(x), \Phi(y)) = \Phi(x) \amalg \Phi(y)$$

(ii) $x_i \cdot y_i \leq x_i$ et $x_i \cdot y_i \leq y_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, Donc $\Phi(x \cdot y) \leq \Phi(x)$ et $\Phi(x \cdot y) \leq \Phi(y)$,

$$\text{Il suit que } \Phi(x \cdot y) \leq \min(\Phi(x), \Phi(y)) = \Phi(x) \cdot \Phi(y).$$

* Si le système est en série alors :

$$\Phi(x \cdot y) = \prod_{i=1}^n x_i y_i = \prod_{i=1}^n x_i \cdot \prod_{i=1}^n y_i = \Phi(x) \cdot \Phi(y).$$

Réciproquement si $\Phi(x \cdot y) \leq \Phi(x) \cdot \Phi(y)$, il est immédiat que la structure Φ est en série.

* Si le système est en parallèle alors :

$$\begin{aligned} \Phi(x \amalg y) &= \prod_{i=1}^n (x_i \amalg y_i) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - (x_i \amalg y_i)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)(1 - y_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) \prod_{i=1}^n (1 - y_i) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \Phi(x)) \prod_{i=1}^n (1 - \Phi(y)) \\ &= \Phi(x) \amalg \Phi(y). \end{aligned}$$

La réciproquement est immédiat.

3.1.4 Liens et coupes

Définition 3.1.9. (Lien) Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le vecteur indiquant les états des composants $C = (1, 2, \dots, n)$. Le vecteur x est dit vecteur-lien si et seulement si $\Phi(x) = 1$. L'ensemble correspondant $C_1(x) = \{i; x_i = 1\}$ s'appelle lien.

Définition 3.1.10. (Lien minimal) Un vecteur -lien **minimal** est un vecteur-lien x tel que si $y < x$ alors $\Phi(y) = 0$. L'ensemble $C_1(x)$ correspondant s'appelle lien minimal. C'est l'ensemble minimal de composants dont le fonctionnement assure le fonctionnement du système.

Définition 3.1.11. (Coupe) Un vecteur x est dite vecteur-coupe ssi $\Phi(x) = 0$. L'ensemble correspondant $C_0(x) = \{i; x_i = 0\}$ s'appelle coupe.

Définition 3.1.12. (Coupe minimale) Un vecteur -coupe minimal est un vecteur-coupe x tel que si $y > x$ alors $\Phi(y) = 1$. L'ensemble $C_0(x)$ correspondant s'appelle coupe minimale. C'est l'ensemble minimal de composants dont la panne entraîne la panne du système.

Remarque 3.1.5. D'après les définitions précédentes on a :

1. le fonctionnement d'un seul lien minimal (le lien fonctionne si tous ses composants fonctionnent) assure le fonctionnement du système.
2. la panne d'une seule coupe minimale (une coupe est en panne si tous ses composants sont en panne) cause la panne du système

3.1.5 Fonction de structure via les liens minimaux et les coupes minimale

La proposition suivante montre qu'on peut écrire la fonction de structure d'un système en fonction de ses liens minimaux et ses coupes minimales :

Proposition 3.1.1. soit Φ une fonction du structure d'ordre n ;