المحور الثالث: الانحدار الخطي المتعدد

المحاضرة 3

أولا: تقديم نموذج الانحدار الخطي المتعدد

نموذج الانحدار الخطي البسيط يفرض وجود متغير مستقل واحد فقط لتفسير المتغير التابع، غير أنه وفي الواقع الاقتصادي كثيرا ما يتطلع المتغير التابع أكثر من متغير واحد لتفسيره.

سنحاول في هذه المحاضرة دراسة الانحدار الخطي المتعدد والذي يضم أكثر من متغير مستقل واحد في تفسير المتغير التابع، مع تقدير معالم النموذج ودراسة خصائصها بالإضافة إلى اختبار فرضيات المعنوية الإحصائية.

- **الشكل العام:**

يمكن كتابة نموذج انحدار خطي عام أو متعدد على الشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_1 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- X_1 ، X_2 ،... X_k : متغيرات مستقلة (أو شارحة) عددها k .
- β_0 ، β_1 ، β_2 ،... β_k تسمى معالم النموذج وعددها: $(k+1)$.
- n طول العينة.
- u_i متغير عشوائي يعبر عن الأخطاء الموجودة في النموذج (الأخطاء في تفسير المتغير التابع Y) ولذلك تسمى الأخطاء، أو أيضا البواقي لأنه يمكن كتابتها عند كل مشاهدة i على الشكل التالي:

$$u_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \beta_1 X_{2i} - \ldots - \beta_k X_{ki}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

الكتابة المصفوفية (Matrix form) للنموذج:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_1 X_{21} + \ldots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\
Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{12} + \beta_1 X_{22} + \ldots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\
&\vdots \\
Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{1n} + \beta_1 X_{2n} + \ldots + \beta_k X_{kn} + u_n
\end{aligned}$$

$$\underset{(n,1)}{Y} = \underset{(n,k+1)}{X} \underset{(k\times 1)}{\beta} + \underset{(n\times 1)}{u}$$

مع:

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- **فرضيات النموذج:**

➢ الفرضية الأولى: النموذج خطي (Linear Model) بالنسبة لمعالم النموذج، وشعاع الأخطاء ويعني هذا أنه يمكن كتابته على الشكل:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_1 X_{2i} + ... + \beta_k X_{ki} + u_i, \quad i=1,2,...,n$$

➢ الفرضية الثانية: قيم المتغير X_{ji} $(j=1,2,...,k, i=1,2,....,n)$ حقيقية مشاهدة بدون أخطاء (غير عشوائية).

➢ الفرضية الثالثة: الأمل الرياضي للأخطاء معدوم، أو بعبارة أخرى: متوسط الأخطاء معدوم:

$$E(u_i)=0, \quad \forall i=1,.....,n$$

➢ الفرضية الرابعة: تجانس أو ثبات تباين الأخطاء Homoscedasticity: وتعني أن تشتت الأخطاء حول المتوسط ثابت، ويعبر عنها رياضيا بالكتابة:

$$V(u_i) = E(u_i^2) = \sigma_u^2 \quad ,\forall i=1.....n$$

➢ الفرضية الخامسة: عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء: بمعنى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة، وهذا على طول العينة، ونعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$Cov(u_s,u_t) = E(u_s u_t) = 0 \quad ,\forall s \neq t \qquad s,t=1.....n$$

الفرضية الرابعة والخامسة يمكن التعبير عنهما معا باستعمال مصفوفة تباين–تباين مشترك للأخطاء والتي يرمز لها بالرمز Ω_u كما يلي:

$$\Omega_u = E(uu') = \begin{pmatrix} E(u_1u_1) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2u_2) & \cdots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & 0 & E(u_nu_n) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_u = \begin{pmatrix} V(u_1) & Cov(u_2,u_1) & \cdots & Cov(u_n,u_1) \\ Cov(u_1,u_2) & V(u_2) & \cdots & Cov(u_n,u_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(u_1,u_n) & Cov(u_2,u_n) & \cdots & V(u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_u^2 \end{pmatrix} = \sigma_u^2 I_n$$

- الفرضية السادسة: الأخطاء مستقلة عن المتغيرات الشارحة: X_j ، أي:

$$Cov(X_{ji}, u_i) = 0, \forall\, j = 1, 2, ..., k, \quad i = 1,\ ...,\ n,$$

- الفرضية السابعة: فرضية التوزيع الطبيعي للأخطاء: وهي تعني أن الأخطاء تتوزع وفق القانون الإحتمالي الطبيعي. هذه الفرضية مع الفرضية الأولى والثانية والثالثة يمكن اختصارها رياضيا كما يلي:

$$u_i \to N(0, \sigma_u^2)$$

- الفرضية الثامنة: عدم وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة وهو ما يستلزم أن محدد المصفوفة $X'X$ غير معدوم وبالتالي يمكن ايجاد المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

- الفرضية التاسعة: $\frac{1}{n}X'X$ تؤول إلى مصفوفة محدودة غير فردية.

- الفرضية العاشرة: عدد المشاهدات أكبر بكثير من عدد المتغيرات المستقلة (بما في ذلك الحد الثابت).

$$(n > k+1)$$

ثانيا: تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد

ليكن نموذج الانحدار الخطي العام في كتابته المصفوفية والمكون من k متغير مستقل و n مشاهدة.

$$Y = X\beta + u$$

مقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}$ تعطى بالعبارة:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

مع: X' يشير إلى منقول المصفوفة X.

ثالثا: خصائص المقدرات

لتسهيل دراسة خصائص المقدرات ينبغي أولا كتابة $\hat{\beta}$ بدلالة β :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y, \ Y = X\beta + u$$
$$\Rightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'(X\beta + u) = (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'u$$
$$\Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'u$$

- **خاصية عدم التحيز:**

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

البرهان:

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta + (X'X)^{-1} X'u) = E(\beta) + (X'X)^{-1} X'E(u)$$
$$E(u) = 0, E(\beta) = \beta \Rightarrow E(\hat{\beta}) = \beta$$

- **خاصية أفضل مقدرات خطية غير متحيزة (BLUE):**

تتضمن هذه النظرية خاصية أقل تباين للمقدرات، ويمكن برهنة هذه الخاصية بعد حساب تباينات المقدرات وذلك كما يلي:

بما أن $\hat{\beta}$ عبارة عن شعاع فتباينه سيعطي مصفوفة تسمى مصفوفة تباين– تباين مشترك ويرمز لها بالرمز: $\Omega_{\hat{\beta}}$، هذه المصفوفة بعدها $(k+1, k+1)$ وتتكون من العناصر:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} V(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_0) \\ Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1) & V(\hat{\beta}_1) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_k,\hat{\beta}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_k) & Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_k) & \cdots & V(\hat{\beta}_k) \end{pmatrix}$$

يمكن أن نبرهن أن:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

البرهان:

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'u \Rightarrow \hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1} X'u$$

$$(\hat{\beta} - \beta)' = u'X(X'X)^{-1}$$

$$\Rightarrow \Omega_{\hat{\beta}} = E\left((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right) = E\left[(X'X)^{-1} X'uu'X(X'X)^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow \Omega_{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1} X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$

يمكن كتابة مصفوفة تباين–تباين مشترك (Ω_u) لشعاع الأخطاء u كما يلي:

$$\Omega_u = E(uu') = \begin{pmatrix} E(u_1u_1) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2u_2) & \cdots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & 0 & E(u_nu_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix} = \sigma_u^2 I_n$$

$$E(uu') = \sigma_u^2 I_n = \Omega_u \Rightarrow \Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} X'X(X'X)^{-1} = \sigma_u^2 (X'X)^{-1}$$

يمكن أن نبرهن أن هذا التباين $\left(\Omega_{\hat{\beta}}\right)$ هو الأقل بحساب نهايته عندما يكون n كبير نسبيا:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} = \sigma_u^2 \frac{n}{n}(X'X)^{-1} = \frac{\sigma_u^2}{n}\left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_{\hat{\beta}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_u^2}{n}\left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1} = 0$$

- **خاصية الاتساق:**

بما أن المقدرات $\hat{\beta}$ تحقق الشروط:

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$
$$\lim_{n\to\infty} \Omega_{\hat{\beta}} = 0$$

إذن المقدرات $\hat{\beta}$ هي مقدرات متسقة للمعالم β .

رابعا: تقدير تباين الاخطاء

تقدير تباين الأخطاء $\hat{\sigma}_u^2$ بطريقة المربعات الصغرى العادية يفضي إلى:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k-1}$$

خامسا: تقييم النموذج المقدر للنموذج الخطي المتعدد

يتم تقييم النموذج المقدر للنموذج الخطي المتعدد بنفس المراحل السابقة في تقييم النموذج الخطي البسيط.

1- **المعايير الاقتصادية:**

تتعلق بحجم وإشارة المعلمات المقدرة، لأن النظرية الاقتصادية تضع قيودا مسبقة على حجم وإشارة المعلمات، فإذا ما جاءت هذه المعلمات على عكس ما تقرره النظرية مسبقا فإن هذا يمكن أن يكون مبررا كافيا لرفض هذه المعلمات.

2- **المعايير الإحصائية**

- **معادلة تحليل التباين:**

كما في نموذج الانحدار الخطي البسيط يمكن كتابة معادلة تحليل التباين في نموذج الانحدار الخطي المتعدد كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$$
$$\text{TSS} = \text{ESS} + \text{RSS}$$

TSSترمز إلى مجموع المربعات الكلية، ESSمجموع المربعات الشارحة، RSS مجموع مربعات البواقي.

- **جدول تحليل التباين:**

جدول تحليل التباين في حالة الانحدار الخطي المتعدد يكون على الشكل التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغيرات المستقلة	$ESS=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2$	k	ESS / k
البواقي	$RSS=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{u}_i\right)^2$	$n-k-1$	$RSS / (n-k-1)$
المجموع	$TSS=ESS+RSS$ $=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$	$n-1$	$\neq$

في حالة الإنحدار الخطي المتعدد، يمكن أيضا اختبار جودة التوفيق بحساب معامل التحديد المتعدد R^2، فهو يشير إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير التابع Y بدلالة المتغيرات المستقلة المدرجة في المعادلة، ويستعمل كمقياس لجودة التوفيق في نموذج الانحدار المحتوي على k متغير مستقل، ولحسابه يمكن إتباع نفس الطريقة المستعملة في النموذج الخطي البسيط:

لدينا:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\beta_3 X_{i3}+....+\beta_k X_{ik}+u_i \quad i=1,....,n$$

يمكن حساب R^2 على الشكل:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}=1-\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}$$

يمكن أيضا كتابة معامل التحديد R^2 بدلالة شعاع المقدرات $\hat{\beta}$ كما يلي:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y}=\frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{Y'Y}=1-\frac{\hat{u}'\hat{u}}{Y'Y}$$

إضافة متغيرات مستقلة أخرى للنموذج لا يمكن أن تقلل من قيمة R^2، بل يمكن أن تزيد من قيمته نظرا لثبات قيمة TSS، وارتفاع قيمة ESS. ولذلك يستحسن تعديل R^2 إلى معامل التحديد المعدل $\left(\bar{R}^2\right)$ وذلك بعد الأخذ بعين الاعتبار درجات الحرية كما يلي:

$$\bar{R}^2=1-\frac{RSS / (n-k-1)}{TSS / (n-1)}=1-\frac{\hat{u}'\hat{u} / (n-k-1)}{Y'Y / (n-1)}=1-\frac{n-1}{n-k-1}\left(1-R^2\right)$$

- **اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم:**

اختبار معنوية معلمة من معالم النموذج يقصد بها إختبار هل هذه المعلمة معدومة أو غير معدومة في النموذج، يمكن كتابة فرضية العدم H_0 على الشكل:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

ويمكن كتابة الفرضية البديلة H_1 على الشكل:

$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

بما أن العلاقة بين Y و X_j قائمة على أساس النموذج الخطي، فإن قبول الفرضية H_0 يعني بأن خط الإنحدار هو عبارة عن خط أفقي، وبالتالي لا توجد علاقة معنوية بين المتغيرين Y و X_j .

الإحصائية المحسوبة:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \rightarrow t_{n-k-1} \quad \forall j = 0,1,\ldots,k$$

تحت الفرضية H_0 :

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \rightarrow t_{n-k-1} \quad \forall j = 0,1,\ldots,k$$

قاعدة القرار :

إذا كانت: $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_j|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} > t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-k-1)$ ففي هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1 ، وبالتالي المعلم β_j معنوي إحصائيا.

بالمقابل: إذا كانت: $|t_c| = \frac{|\hat{\beta}_j|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \leq t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجة حرية $(n-k-1)$ ففي هذه الحالة نقبل الفرضية H_0 ونرفض الفرضية H_1 ، وبالتالي المعلم β_j ليس له معنوية إحصائية، وبالتالي لا توجد علاقة معنوية بين المتغيرين Y و X_j .

اختبار فيشر للمعنوية الكلية:

يهدف هذا الاختبار إلى معرفة مدى المعنوية الكلية للنموذج أي معنوية جميع المتغيرات المستقلة في شرح المتغير التابع في نفس الوقت.

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k \\ H_1 : \exists \beta_j / \qquad \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

تكتب الإحصائية المحسوبة F_c بالاعتماد على جدول تحليل التباين (نسبة التباين المفسر إلى التباين الغير المفسر) كما يلي:

$$F_c = \frac{ESS/q}{RSS/(n-k-1)} = \frac{R^2/q}{\left(1-R^2\right)/(n-k-1)} \to F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

قاعدة القرار لا تتغير.

.اختبار فيشر للقيود المتعددة Wald Test:

لتكن فرضية العدم والفرضية البديلة في شكل كتابات مصفوفية والتي تضع قيودا على مجموعة من المعالم:

$$\begin{cases} H_0 : R\beta = r \\ H_1 : R\beta \neq r \end{cases}$$

مع:

R مصفوفة أبعادها $(q,k+1)$، β شعاع بعده $(k+1,1)$، r شعاع بعده $(q,1)$، يمثل عدد القيود وهو عدد الأسطر في المصفوفة R.

$$F_c = \frac{\left(R\hat{\beta}-r\right)' \left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} \left(R\hat{\beta}-r\right)/q}{\hat{u}'\hat{u}/(n-k-1)} \to F_{(q,n-k-1),\alpha}$$

قاعدة القرار:

إذا كانت: $F_c \geq F_{(q,n-k-1),1-\alpha}$ عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ ودرجات حرية (q) و $(n-k-1)$ على الترتيب، في هذه الحالة نرفض الفرضية H_0 ونقبل الفرضية H_1.

مثال تطبيقي على برمجية Eviews

لتكن لديك البيانات الافتراضية التالية الخاصة بدالة انتاج في اقتصاد ما :

t	Y_t	X_{2t}	X_{3t}
1	4	4	0.9
2	4.5	5	0.8
3	5	6	0.9
4	5.5	7	0.8
5	6	9	0.7
6	7	8	0.6
7	6.5	10	0.6
8	6.5	11	0.8
9	7.5	12	0.5
10	7.5	13	0.5

1- إدخال هذه البيانات يدويا في برمجية EViews، موضحا مختلف التعليمات التي تم اتباعها.

2- إعادة إدخال هذه البيانات في برمجية EViews من خلال إستيراد ملف بصيغة EXCEL موضحا التعليمة التي تم اتباعها.

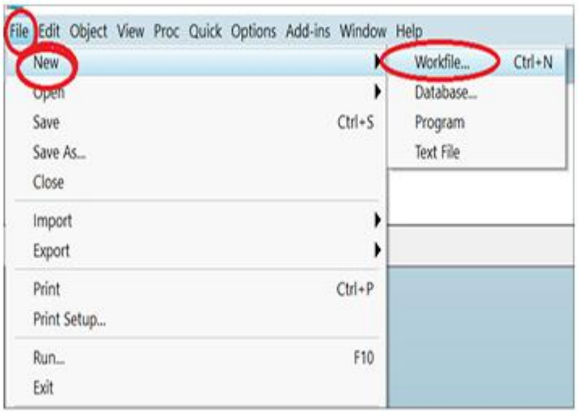
3- إعادة تسمية المتغيرات المستقلة في برمجية EViews، حيث المتغير المستقل الأول يمثل عدد سعات العمل، والمتغير المستقل الثاني يمثل رأس المال المستخدم في الإنتاج.

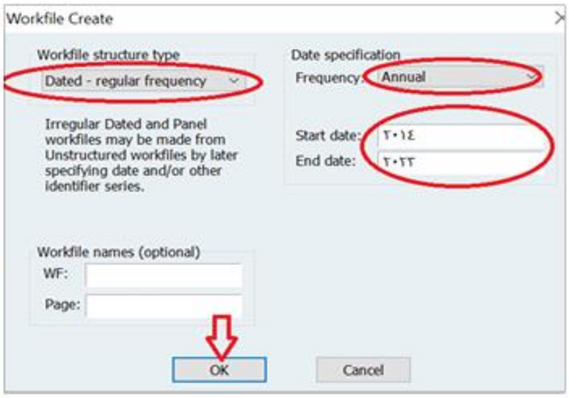
4- تقدير النموذج، كتابته في شكله المقدر وتفسير النتائج، موضحا التعليمات والأوامر المستخدمة في برمجية EViews.

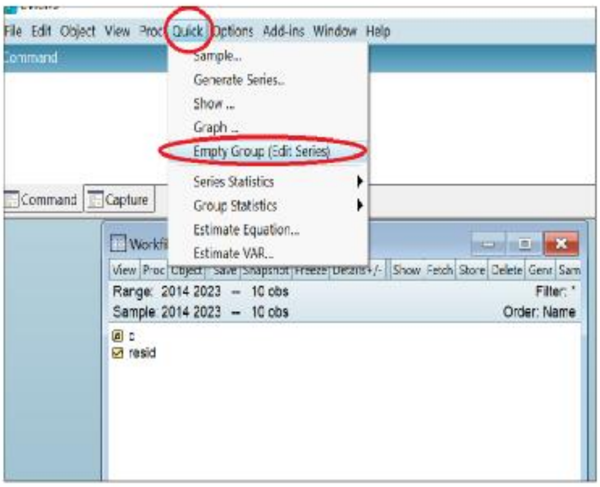
5- إيجاد القيم المقدرة للمتغير التابع وأيضا البواقي، مع توضيح مختلف التعليمات والأوامر المستحدمة على برمجية EViews.

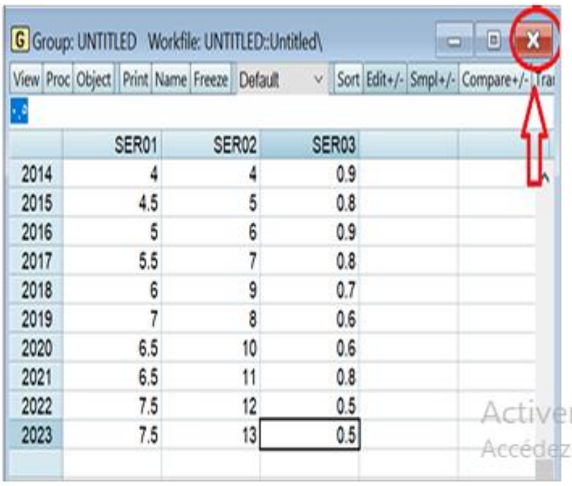
الحل:

1- إدخال البيانات يدويا: نتبع التعليمات التالية من اليسار لليمين:

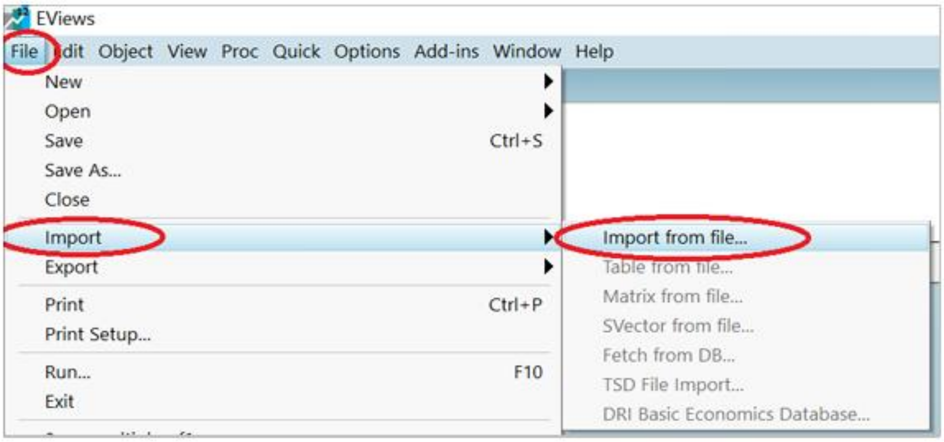

File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Help
New
Open
Save Ctrl+S
Save As...
Close
Import
Export
Print Ctrl+P
Print Setup...
Run... F10
Exit
Workfile... Ctrl+N
Database...
Program
Text File

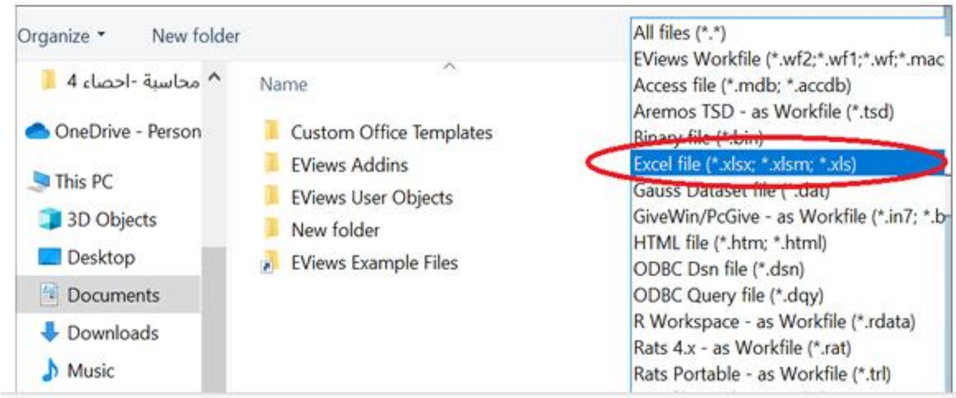

Workfile Create
Workfile structure type
Dated - regular frequency
Irregular Dated and Panel workfiles may be made from Unstructured workfiles by later specifying date and/or other identifier series.
Date specification
Frequency: Annual
Start date: ٢٠١٤
End date: ٢٠٢٣
Workfile names (optional)
WF:
Page:
OK
Cancel


File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Help
Sample...
Generate Series...
Show ...
Graph ...
Empty Group (Edit Series)
Series Statistics
Group Statistics
Estimate Equation...
Estimate VAR...
Command
Capture
View Proc Object Save Snapshot Freeze Details+/- Show Fetch Store Delete Genr Sam
Range: 2014 2023 -- 10 obs
Sample: 2014 2023 -- 10 obs
Filter: *
Order: Name
c
resid

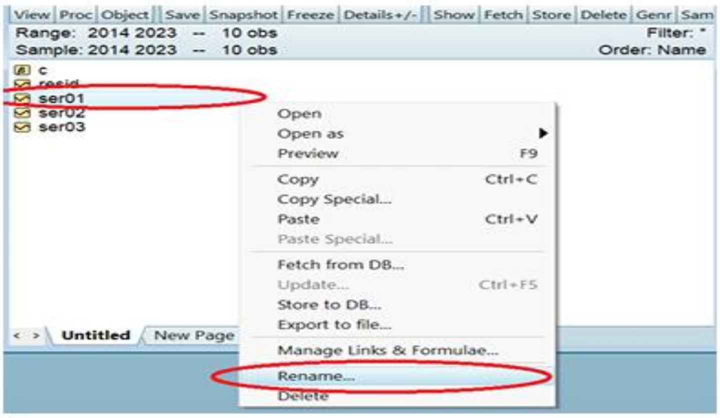

Group: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled\
View Proc Object Print Name Freeze Default Sort Edit+/- Smpl+/- Compare+/-
SER01 SER02 SER03
2014 4 4 0.9
2015 4.5 5 0.8
2016 5 6 0.9
2017 5.5 7 0.8
2018 6 9 0.7
2019 7 8 0.6
2020 6.5 10 0.6
2021 6.5 11 0.8
2022 7.5 12 0.5
2023 7.5 13 0.5

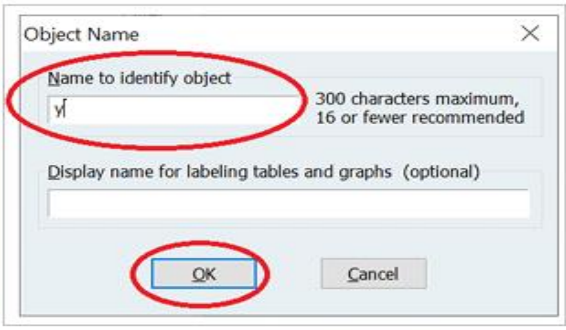
2- استيراد ملف EXCEL الى البرنامج:

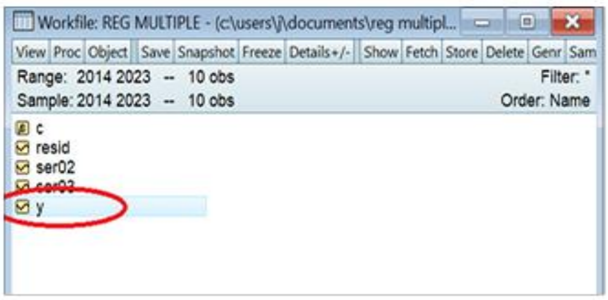




3- إعادة تسمية المتغيرات: باتباع التعليمات التالية:







4- تقدير النموذج بطريقة المربعات الصغرى العادية OLS:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 02/18/24 Time: 11:26
Sample: 2014 2023
Included observations: 10

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6.294020	1.563534	4.025509	0.0050
X2	0.241528	0.072307	3.340337	0.0124
X3	-3.305648	1.436586	-2.301045	0.0549

R-squared	0.921915	Mean dependent var	6.000000
Adjusted R-squared	0.899604	S.D. dependent var	1.224745
S.E. of regression	0.388063	Akaike info criterion	1.188029
Sum squared resid	1.054153	Schwarz criterion	1.278805
Log likelihood	-2.940147	Hannan-Quinn criter.	1.088449
F-statistic	41.32272	Durbin-Watson stat	2.410244
Prob(F-statistic)	0.000133		

التعليمة المستعملة في عملية التقدير:

click in order on the variables $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X2}, \boldsymbol{X3} \rightarrow$ *open as equation* $\rightarrow$ *ok*

ويكتب النموذج في شكله المقدر بالصيغة التالية:

$$\widehat{\boldsymbol{Y}}_t = \mathbf{6.29} + \mathbf{0.24}\boldsymbol{X}_{2t} - \mathbf{3.30}\boldsymbol{X}_{3t}$$

$$\text{Std. Error}: \quad (1.563) \quad (0.072) \quad (1.436)$$

$$\text{t}-\text{Statistic}: \quad (4.025) \quad (3.340) \quad (-2.30)$$

$$\text{R}^2 = 0.9219 \qquad \text{F}-\text{statistic} = 41.32 \qquad \text{DW} = 2.41$$

ويتضح من نتائج التقدير مايلي:

- قيمة المعامل الثابت $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \mathbf{6.29}$، تمثل القيمة المتوقعة للمتغير التابع عندما تكون المتغيرات المستقلة مساوية للصفر. وتعتبر قيمة هذا المعامل معنوية، حيث جاءت قيمة إحصائية ستودنت المحسوبة $(\text{t}-\text{Statistic} = 4.02)$ أكبر من القيمة الجدولية لها عند مستوى معنوية 5% $(St_{10-3}^{0.025} = 2.365)$.
- قيمة المعامل $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 = \mathbf{0.24}$ تقيس التغير في المتغير التابع $\widehat{\boldsymbol{Y}}_t$ الناتج عن التغير في المتغير المستقل $\boldsymbol{X}_{2t}$. وتوجد علاقة طردية بين المتغيرين، فزيادة المتغير المستقل بوحدة واحدة سوف تؤدي إلى الزيادة في المتغير التابع بـ **0.24** وحدة. وتعتبر قيمة هذا المعامل هي الأخرى معنوية، حيث جاءت قيمة إحصائية ستودنت المحسوبة $(\text{t}-\text{Statistic} = 3.34)$ أكبر من القيمة الجدولية لها عند مستوى معنوية 5% $(St_{10-3}^{0.025} = 2.365)$.
- قيمة المعامل $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_3 = -\mathbf{3.30}$ تقيس التغير في المتغير التابع $\widehat{\boldsymbol{Y}}_t$ الناتج عن التغير في المتغير المستقل $\boldsymbol{X}_{3t}$. وتوجد علاقة عكسية بين المتغيرين، فزيادة المتغير المستقل بوحدة واحدة سوف تؤدي إلى الانخفاض في المتغير التابع بـ 3.30 وحدة. غير أنّ هذه المعلمة تعتبر غير معنوية عند 5% (القيمة المحسوبة أقل من الجدولية) ولكنها معنوية عند 10% $(St_{10-3}^{0.05} = 1.89)$.

- قيمة إحصائية فيشر المحسوبة تدل على معنوية النموذج ككل، إذ جاءت القيمة المحسوبة $(F - \text{statistic} = 41.32)$ أكبر من القيمة الجدولية $\left(F_{tab} = F_{(k-1.n-k)}^{\alpha=5\%} = F_{(2.7)}^{\alpha=5\%} = 4.737 \right)$.
- قيمة معامل التحديد $\mathbf{R^2 = 0.9219}$ تقيس جودة التوفيق. ويقيس هذا المعامل نسبة التباين التي يفسرها نموذج الانحدار لاجمالي التباين في قيم المتغير التابع $\boldsymbol{Y}$. اقتصاديا تعني قيمة معامل التحديد أنّ **92.19%** من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع سببها التغيرات التي تحدث في المتغيرات المستقلة، والباقي يمكن إرجاعها إلى متغيرات أخرى لم يتم إدراجها في النموذج.
- قيمة إحصاءة دربن واتسن DW = 2.41، تشير إلى خو النموذج من الارتباط الذاتي للأخطاء، حيث تقع هذه القيمة في منطقة الرفض (رفض وجود إرتباط ذاتي للأخطاء).

5- إيجاد القيم المقدرة للمتغير التابع وللبواقي:

$$Table\ Estimation \rightarrow View \rightarrow Actual, Fitted, Residual \rightarrow Actual, Fitted, Residual\ Table \rightarrow Ok$$

obs	Actual	Fitted	Residual	Residual Plot
2014	4.00000	4.28505	-0.28505	
2015	4.50000	4.85714	-0.35714	
2016	5.00000	4.76811	0.23189	
2017	5.50000	5.34020	0.15980	
2018	6.00000	6.15382	-0.15382	
2019	7.00000	6.24286	0.75714	
2020	6.50000	6.72591	-0.22591	
2021	6.50000	6.30631	0.19369	
2022	7.50000	7.53953	-0.03953	
2023	7.50000	7.78106	-0.28106