Chapitre 3

Fiabilité des systèmes Cohérents binaires

Le but de ce chapitre est de donner les notions de bases et les propriétés des systèmes complexes, cohérents et binaires. On suppose que chaque composant et le système lui même possède que deux états 0 et 1 ou 0 veut dire que le système est en panne et 1 fonctionne c.à.d. l'ensemble des états est $E = \{0, 1\}$ avec l'ensemble des états de marche est $M = \{1\}$ et l'ensemble des états de panne est $P = \{0\}$

Dans la théorie de la fiabilité un problème clé est de trouver la fiabilité d'un système complexe à partir des fiabilités de ses composants. Pour cette raison nous présentons un utile descriptif qui nous permette de savoir les relations entre un système et ses composants ensuite nous passerons au calcul proprement dit de la fiabilité d'un système en fonction des fiabilités de ses composants.

Définition 3.0.1. *Un système binaire est tous système possède deux états marche et en panne, dans ce cas les composants aussi possèdent deux états marche et en panne.*

Alors nous avons besoins des notations.

Notations :

1. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. tel que $x_i = 0$ ou 1 $\forall i = 1, 2, ..., n$.
2. $\prod_{i=1}^{n} x_i = \min(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$

3. $\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \max_{1 \le i \le n} x_i$
4. $(\bullet_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, ..., x_n)$
5. $(1_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$
6. $(0_i, x) = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$
7. Si $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ on a :
   $*\ x \amalg y = (x_1 \amalg y_1, x_2 \amalg y_2, ..., x_n \amalg y_n)$
   $*\ x \le y \Longrightarrow x_i \le y_i \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.$
   $*\ x < y \Longrightarrow x_i \le y_i$ avec $x_j < y_j$ pour un certain j.
   $*\ x << y \Longleftrightarrow x_i < y_i \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.$
8. x^A est le vecteur composé des coordonnées x_i pour $i \in A$.
9. $\overline{A}$ est le sous-ensemble complémentaire de A.

3.1 Propriétés déterministes des systèmes complexes

Dans ce paragraphe, on considère les relations (déterministes) de structure entre un système et ses composants, en supposant que l'état du système ne dépend que des états de ses composants.

3.1.1 Système des composants

Soit un système des composants $C = \{1, 2, ..., n\}$ et x_i la variable qui représente l'état du composant i pour $i = 1, 2, ..., n$ (c.à.d. $x_i = 0$ si le composant i est en panne et $x_i = 1$ si le composant i fonctionne) et soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Définition 3.1.1. ***(Fonction de structure)*** *: On appelle fonction de structure et on la note Φ la fonction qui représente l'état du système c'est-à-dire :*

$$\begin{array}{rcl} \Phi(x) & : & \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longrightarrow & \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

ou

$$\forall x \in \{0,1\}^n : \Phi(x) = \begin{cases} 0 \text{ si le système est en panne.} \\ 1 \quad \text{si le système fonctionne.} \end{cases}$$

* Le nombre n des composants est appelé l'ordre du système.

* On dit aussi le système (c, Φ) quand on veut préciser l'ensemble des composants. Dans toute la suite on ne fera pas la distinction entre "système" et "structure".

* On a l'ensemble $\{0,1\}^n$ contient 2^n vecteurs différents. Alors tout vecteur $x \in \{0,1\}^n$ tq $\Phi(x) = 1$ s'appel vecteur de marche pour le système et tout vecteur $x \in \{0,1\}^n$ tq $\Phi(x) = 0$ s'appel vecteur de panne pour le système.

3.1.2 Quelques systèmes usuels

1) Système en série :

Définition 3.1.2. *On appelle un système en série tout système qui fonctionne si et seulement si tous ses composants fonctionnent, alors :*

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1; ssi \quad x_i = 1; \forall i = 1, 2, ..., n \\ \quad 0 \quad sinon \end{cases}$$

Donc il est clair que :

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i = \min_{1 \leq i \leq n} x_i.$$

** Pour un système en série il existe un seul vecteur de marche* $x = (1, 1, ..., 1)$ *et* $2^n - 1$ *vecteurs de panne.*

** Comme exemple si* $n = 3$ *on a le vecteur de marche est* $x = (1, 1, 1)$ *et les* 7 *vecteurs de marches sont* $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$

2) Système en parallèle :

Définition 3.1.3. *On appelle un système en parallèle tout système qui tombe en panne si et seulement si tous ses composants tombent en panne, alors :*

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 0; ssi \quad x_i = 0; \forall i = 1, 2, ..., n \\ \quad 1 \quad\quad sinon \end{cases}$$

Donc il est clair que :

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = \coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$$

* *Pour un système en parallèle il existe un seul vecteur de panne* $x = (0, 0, ..., 0)$ *et* $2^n - 1$ *vecteurs de marches.*

* *Comme exemple si* $n = 3$ *on a le vecteur de panne est* $x = (0, 0, 0)$ *et les* 7 *vecteurs de marches sont* $(1, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$

3) Système "k-sur-n : G" $(k \leq n)$

On appelle un système "**k-sur-n : G**" tout système qui fonctionne si et seulement si au moins k de ses composants fonctionnent, alors :

$$\forall x \in \{0, 1\}^n : \Phi(x) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

c'est-à-dire :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases} = 1_{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k\right\}}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Remarque 3.1.1. • *Si* $k = n$ *on a le système "**n-sur-n : G**" est un système en série.*

• *Si $k=1$ on a le système "**1-sur-n : G**" est un système en parallèle.*

4) Système "k-sur-n : F" $(k \leq n)$

On appelle un système "**k-sur-n : F**" : tout système qui tombe en panne si et seulement si au moins k de ses composants tombent en panne, alors :

$$\forall x \in \{0,1\}^n : \Phi(x) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-k$$

c'est-à-dire :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n-k+1 \\ 0 & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leq n-k \end{cases} = 1_{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n-k+1\right\}}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Remarque 3.1.2. • *Si $k=n$ on a le système "**n-sur-n : F**" est un système en parallèle.*

• *Si $k=1$ on a le système "**1-sur-n : F**" est un système en série.*

5) système "k-consécutifs-sur n : F" $(k \leq n)$

Définition 3.1.4. *Un système "**k-consécutifs-sur n : F**" est un système composé de n composants et il ftombe en panne si et seulement si au moins k composants consécutifs tombent en panne c.à.d.*

$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Longleftrightarrow$ *au moins k coordonnées successives du vecteur x valent* 0

Donc on peut écire :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (x_1 \amalg x_2 \amalg ... \amalg x_k).(x_2 \amalg ... \amalg x_{k+1})...(x_{n-k+1} \amalg ... \amalg x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n-k+1} \coprod_{j=i}^{i+k-1} x_j = \min_{1\leq i\leq (n-k+1)} \max_{i\leq j\leq (i+k+1)} (x_j).\end{aligned}$$

Remarque 3.1.3. • *Si $k = 1$: Un système "**1-consécutifs-sur n : F**" est un système en série.*

• *Si $k = n$: Un système "**n-consécutifs-sur n : F**" est un système en parallèle.*

6) système "k-consécutifs-sur n : F" $(k \leq n)$

Définition 3.1.5. *Un système "**k-consécutifs-sur n : G**" est un système composé de n composants et il fonctionne si et seulement si au moins k composants consécutifs fonctionnent c.à.d.*

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 \Longleftrightarrow \textit{au moins } k \textit{ coordonnées successives du vecteur } x \textit{ valent } 1$$

Donc on peut écire :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= (x_1 x_2 ... x_k) \amalg (x_2 x_3 ... x_{k+1}) \amalg ... \amalg (x_{n-k+1} x_{n-k+2} ... x_n) \\ &= \coprod_{i=1}^{n-k+1} \prod_{j=i}^{i+k-1} x_j = \max_{(1\leq i\leq n-k+1)} \min_{i\leq j\leq (i+k-1)} (x_j).\end{aligned}$$

Remarque 3.1.4. • *Si $k = 1$: Un système "**1-consécutifs-sur n : G**" est un système en parallèle.*

• *Si $k = n$: Un système "**n-consécutifs-sur n : G**" est un système en série*

Définition 3.1.6. ***(Composant utile)*** *Soit Φ une structure d'ordre n, le $i^{ème}$ composant est dit **inutile** à la structure Φ si la fonction $\Phi(x)$ est constante par rapport* *à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée x_i du vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; c'est-à-dire :*

$$\Phi(1_i, x) = \Phi(0_i, x) \ \textit{pour tout vecteur} (\bullet_i, x)$$

Notons qu'un composant inutile ne peut jamais causer directement la panne d'un système. Comme exemple d'un tel composant on peut considérer un condensateur disposé en parallèle avec un dispositif électrique, son rôle est de couper les hauts voltages qui peuvent détruire le dispositif électrique. Donc bien qu'inutile, le condensateur peut être très important dans la durée de vie du dispositif électrique, c'est le cas d'un disjoncteur dans les compteurs électriques domestiques.

Lemme 3.1.1. ***(Décomposition pivotale)*** *Pour toute fonction de structure Φ d'ordre n, on a la décomposition suivante : pour tout x et pour tout i, $i = 1, 2, ..., n$.*

$$\Phi(x) = x_i \Phi(1_i, x) + (1 - x_i) \Phi(0_i, x)$$

**Ce lemme précédent nous permet d'écrire la fonction de structure d'ordre n en fonction de la fonction de structure d'ordre $n-1$.*

**En répétant cette opération plusieurs fois on obtient :*

$$\Phi(x) = \sum_y \prod_{j=1}^{n} x_j^{y_j} (1 - x_j)^{1 - y_j} \Phi(y)$$

la somme porte sur tous les vecteurs $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \{0, 1\}^n$ tels que $0^0 = 1$.

Démonstration :

x_i prend les valeurs 1 uo 0. Donc :

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi(1_i, x) & \text{si } \ x_i = 1. \\ \Phi(0_i, x) & \text{si } \ x_i = 0. \end{cases}$$

D'où :

$$\Phi(x) = 1_{\{1\}}(x_i) \Phi(1_i, x) + 1_{\{0\}}(x_i) \Phi(0_i, x)$$