

Ce qui équivaut, en notant

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du.$$

Le taux de défaillance cumulé, à la sur-additivité de la fonction Λ :

$$\forall s, t \geq 0 \quad \Lambda(t+s) \geq \Lambda(t) + \Lambda(s).$$

La terminologie est due au fait que, pour tout $t > 0$, la durée de survie τ_t à la date t est stochastiquement inférieure à la durée initiale T , au sens où :

$$\forall s \geq 0 \quad P(\tau_t > s) \leq P(T > s).$$

Proposition 8 *tout loi I F R est NBU.*

Démonstration : La sur-additivité de la fonction Λ s'écrit :

$$\forall s, t \geq 0 \quad \int_t^{t+s} \lambda(u) du \geq \int_0^s \lambda(u) du.$$

Or, si λ est croissante, on a :

$$\int_t^{t+s} \lambda(u) du = \int_0^s \lambda(t+u) du \geq \int_0^s \lambda(u) du.$$

Notons $\lambda(\infty)$ le **taux de défaillance asymptotique**, c'est-à-dire :

$$\lambda(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t).$$

lorsque cette limite existe.

Proposition 9 *(approximation exponentielle) Si T est NBU, si λ est bornée (hors d'un voisinage de 0) et si $\lambda(\infty)$ existe, alors :*

$$P(T > t) \geq e^{-\lambda(\infty)t}$$

Démonstration : Nous avons vu que, dans le cas NBU, pour tous s et t :

$$\int_0^t \lambda(u) du \leq \int_0^t \lambda(s+u) du.$$

En faisant tendre s vers l'infini, nous obtenons :

$$\int_0^t \lambda(u) du \leq \lambda(\infty) t.$$

d'où le résultat.

ce résultat fournit une approximation exponentielle de la fiabilité qui est pessimiste.

2.2.4 Deux familles de lois classiques en fiabilité

La loi gamma

Soit α et β deux réels strictement positifs. La loi gamma de paramètres (α, β) est la loi de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction Γ étant définie pour $\alpha > 0$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Le paramètre α est le paramètre de forme et β le paramètre d'échelle.

Nous résumons les principales propriétés de la loi gamma dans la proposition suivante.

Proposition 10

1.(a) pour $0 < \alpha < 1$, la loi gamma de paramètres (α, β) est D F R et son taux de hasard h vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{\beta}.$$

(b) pour $\alpha > 1$, la loi gamma de paramètres (α, β) est I F R et son taux de hasard h vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{\beta}.$$

2. Soit T une variable aléatoire de loi de gamma de paramètres (α, β) , alors :

$$E(T) = \alpha\beta, \quad \text{var}(T) = \alpha\beta^2,$$

$$E(e^{-sT}) = \frac{1}{(1+\beta s)^\alpha}, \quad E(e^{iuT}) = \frac{1}{(1-i\beta u)^\alpha}.$$

3. Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de gamma de paramètres respectifs (α_1, β) et (α_2, β) . alors $T_1 + T_2$ est de loi de gamma de paramètres $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

La famille des lois gamma contient des lois connues. La loi gamma de paramètres :

- $\alpha = 1$ et β est la **loi exponentielle** de paramètre $\frac{1}{\beta}$.
- $\alpha = n$ et $\beta = \frac{1}{\lambda}$ est la **loi d'Erlang** d'ordre n et de paramètre λ (loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ),
- $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = 2$ est la **loi du χ^2** à n degrés de liberté (loi de la somme des carrés de n variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée de variance 1).

La loi de weibull

Donnons-nous trois paramètres α, β et θ , les deux premiers étant strictement positifs, le troisième étant positifs ou nul. La loi de densité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t - \theta}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t - \theta}{\alpha} \right)^\beta \right\}.$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[\theta, +\infty[$ est la **loi de weibull** de paramètres (α, β, θ) .

Le paramètre α est le paramètre d'échelle, β le paramètre de forme et θ le paramètre de translation.

Remarquons que le cas $\beta = 1$ et $\theta = 0$ correspond à la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\alpha}$.

Nous ne considérons ici que le cas $\theta = 0$ et nous parlerons alors de la loi de weibull de paramètres (α, β) .

Proposition 11 *Soit T variable aléatoire de loi de weibull de paramètres (α, β) , Notons h son taux de hasard.*

1. Alors :

$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta-1}, \quad p(T > t) = \exp \left\{ - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\beta} \right\},$$

$$E(T) = \alpha \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right), \quad \text{var}(T) = \alpha^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right],$$

2. La variable aléatoire $\left(\frac{T}{\alpha} \right)^{\beta}$ est de loi exponentielle de paramètre 1.

La loi de weibull est très utilisée en fiabilité. La première raison est que cette loi est apparue “ expérimentalement ” lors d'études sur le taux de défaillance de matériels. Notons λ le taux de défaillance du matériel étudié et Λ son taux de défaillance cumulé :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds.$$

J. Duane a constaté que $\log \Lambda(t)$ était approximativement une fonction linéaire de $\log t$.

On peut également considérer que le théorème des valeurs extrêmes fournit une explication mathématique au fait que cette loi se rencontre “ dans la nature ”.

Théorème 5 (extrait du théorème des valeurs extrêmes) *Considérons des variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ indépendantes de même loi de fonction de répartition F . Supposons qu'il existe :*

- a. un réel x_0 pour lequel $F(x_0) = 0$ et $F(x) > 0$ pour tout $x > x_0$,
- b. un réel $\beta > 0$ tel que, pour tout $x > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(xt + x_0)}{F(t + x_0)} = x^{\beta}.$$

Alors il existe des suites de réels a_n et b_n ($a_n > 0$) telles que la suite de variable aléatoire :

$$Z_n = \min_{1 \leq k \leq n} (a_n X_k + b_n).$$

converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers une variable aléatoire de loi de weibull de paramètre de forme β .

La variable Z_n peut représenter la durée de vie d'un matériel décomposé en n éléments, le matériel étant défaillant dès que l'un des éléments le constituant est défaillant (imaginer par exemple un câble découpe “virtuellement” en n tronçons).

Exemple 3 Si les X_k sont de loi de gamma de paramètres de forme α , alors Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi de weibull de paramètre de forme α . En effet, $x_0 = 0$ et en appliquant la formule généralisée des accroissements finis (règle de L'hôpital), on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(xt) - F(0)}{F(t) - F(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{xf(xt)}{f(t)} = x^\alpha.$$

2.3 Exercices

Exercice 9 On considère un système formé de n composants indépendants et non réparables. On suppose que le taux de défaillance de chaque composant est constant .

Donner la formule de la fiabilité du système en fonction des fiabilités de ses composants et calculer et étudier (IFR et DFR) le taux de défaillance du système dans les deux cas suivants

- * Cas d'un système en série
- * Cas d'un système en parallèle

Exercice 10 On considère un système " k -sur- n : G " dont les composants sont indépendants, identiques et non réparables. Donner la formule de la fiabilité du système.