

2.2.1 Les formules de base

Nous commençons par supposer que la loi de T admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 27 On appelle **taux de hasard** de la variable aléatoire T , la fonction :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} & \text{si } \bar{F}(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \bar{F}(t) = 0 \end{cases}$$

La fonction f n'est définie qu'à une équivalence près (relativement à la mesure de Lebesgue), il en est donc de même pour le taux de hasard h . cependant, dans la plupart des applications, la variable T admet pour densité une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

* Si T représente la durée de fonctionnement sans défaillance d'un matériel, la fonction h s'appelle le **taux de défaillance** du matériel et se note λ .

* Si T représente la durée de réparation, h est appelée le **taux de réparation** et se note μ .

La terminologie de “**taux**” est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 3 Supposons que la variable aléatoire T admette une densité f qui soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $t > 0$ tel que $P(T > t) > 0$

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta} P(t < T \leq t + \Delta / T > t).$$

Démonstration : il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{\Delta} P(t < T \leq t + \Delta / T > t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta}.$$

et que $F' = f$ puisque f est continue.

Proposition 4 Supposons que T admette une densité f qui soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et soit $A = \{t > 0 : \bar{F}(t) \neq 0\}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall t \in A, h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$
2. $\forall t \in A, h(t) = (-\log \bar{F}(t))'$
3. $\forall t \in A, \bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)$
4. $\forall t \in A, f(t) = h(t) \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)$.

Démonstration : La condition 1 équivaut à $h(t) = \frac{-\bar{F}(t)'}{\bar{F}(t)}$, d'où l'équivalence entre 1 et 2. L'équivalence entre les conditions 2 et 3 est immédiate en utilisant le fait que $\bar{F}(0) = 1$. L'implication $3 \implies 4$ s'obtient par dérivation et $4 \implies 3$ par intégration en remarquant que 4 s'écrit :

$$-\bar{F}(t)' = -\left[\exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)\right]'.$$

Proposition 5 *La variable aléatoire T a pour taux de hasard h si et seulement si, pour tout t positif :*

$$P(T > t) = \exp \left(- \int_0^t h(s) ds \right).$$

Démonstration : Supposons que T ait pour taux de hasard h , alors on a :

$$P(T \leq t) = \int_0^t f(s) ds = \int_0^t P(T > s) h(s) ds.$$

Nous en déduisons que la fonction $z(t) = P(T > t)$ est solution de l'équation intégrale :

$$z(t) = 1 - \int_0^t z(s) h(s) ds.$$

Où cette équation admet une et une seule solution $t \rightarrow z(t)$ qui soit bornée sur tout compact, et cette solution est :

$$z(t) = \exp \left(- \int_0^t h(s) ds \right).$$

Réciproquement, supposons que $P(T > t) = \exp \left(- \int_0^t h_0(s) ds \right)$ pour une certaine fonction h_0 . En utilisant la condition nécessaire que nous venons de démontrer, nous voyons que :

$$\int_0^t h(s) ds = \int_0^t h_0(s) ds \quad \forall t,$$

et par conséquent $h = h_0$ presque-partout (relativement à la mesure de Lebesgue).

Nous allons déduire deux corollaires de cette proposition. Le premier n'est qu'une ré-écriture de la proposition (1.2.3) avec la terminologie de la fiabilité.

Corollaire 4 *La fiabilité d'un matériel de taux de défaillance λ est :*

$$R(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right)$$

Le second corollaire est une manière d'exprimer le fait que la loi exponentielle est la seule loi avec densité qui soit sans mémoire.

Corollaire 5 *La variable aléatoire T a un taux de hasard constant égale à c si et seulement si T est de loi exponentielle de paramètre c .*

Si la variable aléatoire T désigne la durée de bon fonctionnement d'un matériel, un taux de défaillance constant signifie que le matériel ne vieillit pas (et ne rajeunit pas non plus!).

Il est couramment admis que la courbe du taux de défaillance $t \rightarrow \lambda(t)$ d'un matériel est une courbe en baignoire (cf figure ci-dessous).

Pendant une première période, le taux de défaillance est décroissante, c'est la période de déverminage ou de rodage ou encore de jeunesse, puis le taux de défaillance est approximativement constant, c'est la période de « vie utile », enfin dans une troisième phase le taux de défaillance est croissant, c'est la période de vieillissement ou d'usure.

2.2.2 Taux de défaillance monotone

Nous supposons ici que la variable aléatoire T possède une densité et représente la durée de fonctionnement d'un matériel, nous parlerons donc de taux de défaillance au lieu de hasard et nous le noterons $\lambda(t)$ au lieu de $h(t)$.

* Une variable aléatoire ou une loi est dite **IFR** (increasing Failure Rate) si son taux de défaillance est une fonction croissante.

* Elle est dite **DFR** (Decreasing Failure Rate) si son taux de défaillance est une fonction décroissante.

Définition 28 on appelle durée de survie à la date t , une variable aléatoire τ_t dont la loi est donnée par :

$$P(\tau_t > x) = P(T - t > x | T > t) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}.$$

Proposition 6 On suppose f continue, donc $\bar{F}$ dérivable, alors :

- 1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - T est I F R,
 - $\log \bar{F}$ est concave,
 - $\forall a > 0$, la fonction $t \rightarrow \frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)}$ est décroissante,
 - $\forall a > 0$, la fonction $t \rightarrow p(\tau_t > a)$ est décroissante.
- 2) Les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - T est D F R,
 - $\log \bar{F}$ est convexe,
 - $\forall a > 0$, la fonction $t \rightarrow \frac{\bar{F}(t+a)}{\bar{F}(t)}$ est croissante,
 - $\forall a > 0$, la fonction $t \rightarrow p(\tau_t > a)$ est croissante.

Proposition 7 Posons $a_n = \frac{E(T^n)}{n!}$ pour $n \geq 0$. soit n tel que les quantités a_{n-1}, a_n, a_{n+1} soient finies, nous avons :

- si T est I F R alors $a_{n-1}a_{n+1} \leq a_n^2$,
- si T est D F R alors $a_{n-1}a_{n+1} \geq a_n^2$.

Le coefficient de variation d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité d'espérance μ et de variance σ^2 est le quotient $\frac{\mu}{\sigma}$. Cela peut s'interpréter comme la version aléatoire de la notion d'erreur relative

Corollaire 6 Soit T une variable aléatoire de carré intégrable :

- si T est I F R alors $\frac{\mu}{\sigma} \leq 1$,
- si T est D F R alors $\frac{\mu}{\sigma} \geq 1$.

2.2.3 Loi NBU

La variable aléatoire T (ou sa loi) est **NBU** (New Better than Used) si pour tous s et t :

$$\bar{F}(t+s) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(s),$$