$C_1 = \{1\}$ car 1 conduit à tous les autres états $\left(P_{1,2} = P_{1,3} = P_{1,4} = P_{1,5} = \frac{1}{4} \neq 0\right)$mais aucun état conduit à 1 $\left(P_{2,1}^{(n)} = P_{3,1}^{(n)} = P_{4,1}^{(n)} = P_{5,1}^{(n)} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\right)$ donc 1 **ne communique pas** avec les autres états**.**

$C_2 = \{2\}$ car 2 conduit à $3, 4$ et 5 $\left(P_{2,3} = \frac{1}{2} \neq 0, P_{2,4} = \frac{1}{2} \neq 0, P_{2,5}^{(2)} = \frac{1}{2} \neq 0\right)$ mais aucun état conduit à 2 $\left(P_{3,2}^{(n)} = P_{4,2}^{(n)} = P_{5,2}^{(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}\right)$ donc 2 **ne communique pas** avec les autres états

$C_3 = \{3\}$ car 3 conduit 4 et 5 $\left(P_{3,4} = \frac{3}{4} \neq 0, P_{3,5} = \frac{1}{4} \neq 0\right)$mais aucun état conduit à 3 $\left(P_{4,3}^{(n)} = P_{5,3}^{(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}\right)$ donc 3 **ne communique pas** avec les autres états

$C_4 = \{4\}$ car 4 conduit 5 $\left(P_{4,5} = \frac{3}{4} \neq 0\right)$mais 5 ne conduit pas à 4 $\left(P_{5,4}^{(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N}\right)$ donc 4 **ne communique pas** avec les autres états

$C_5 = \{5\}$ car 5 ne conduit à aucun autre état et 5, $P_{5,5} = 1$ donc 5 **ne communique pas** avec les autres états

3- La chaine est-elle irréductible : Comme la chaine possède 5 classes d'équivalence alors elle n'est pas irréductible)

4- déterminer les périodes de chaque états

* On a $P_{1,1}^{(n)} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ Alors $\left\{n \in \mathbb{N}^*, P_{1,1}^{(n)} \neq 0\right\} = \Phi$ donc $d(1) = 0$

* On a $P_{2,2}^{(n)} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ Alors $\left\{n \in \mathbb{N}^*, P_{2,2}^{(n)} \neq 0\right\} = \Phi$ donc $d(2) = 0$

* On a $P_{3,3}^{(n)} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ Alors $\left\{n \in \mathbb{N}^*, P_{3,3}^{(n)} \neq 0\right\} = \Phi$ donc $d(3) = 0$

* On a $P_{4,4} = \frac{1}{4}$ il y a une boucle donc $d(4) = 1$

* On a $P_{5,5} = 1$ il y a une boucle (5 état absorbant) donc $d(5) = 1$

5) Calculer les probabilités

* $P_{1,4}^{(5)} = P_{1,2}P_{2,3}P_{3,4}P_{4,4}P_{4,4} + P_{1,2}P_{2,4}P_{4,4}P_{4,4}P_{4,4} + P_{1,3}P_{3,4}P_{4,4}P_{4,4}P_{4,4} + P_{1,4}P_{4,4}P_{4,4}P_{4,4}P_{4,4} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{256}$

* $P_{3,4}^{(2)} = P_{3,4}P_{4,4} = \frac{3}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

* $P(X_2 = 3 | X_0 = 1) = P_{1,3}^{(2)} = P_{1,2}P_{2,3} = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

* $P(X_4 = 4 | X_0 = 2) = P_{2,4}^{(4)} = P_{2,3}P_{3,4}P_{4,4}P_{4,4} + P_{2,4}P_{4,4}P_{4,4}P_{4,4} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

* $P(X_4 = 4 | X_0 = 1) = P_{1,4}^{(4)} = P_{1,2}P_{2,3}P_{3,4}P_{4,4} + P_{1,2}P_{2,4}P_{4,4}P_{4,4} + P_{1,3}P_{3,4}P_{4,4}P_{4,4} + P_{1,4}P_{4,4}P_{4,4}P_{4,4} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{64}$

6) Donner la loi de X_n dans le cas ou X_{n-1} prend que les deux valeurs 1 et 2 avec même probabilité

On a X_{n-1} prend que les deux valeurs 1 **et** 2 avec même probabilité c. à. d : $\mu_{n-1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$. Alors la loi μ_n de X_n est donnée par

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \mu_{n-1}P \\
&= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(0, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)
\end{aligned}$$

7) Déterminer les lois de probabilité invariantes de la chaine.

La loi de probabilité invariante est la solution du système d'équations donné par $\pi = \pi P$ avec $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ et $\sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$ alors on a

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et obtient :

$$\begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 \\ \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_4 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_5 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{3}{4}\pi_4 + \pi_5 \end{cases}$$

Alors on a $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 0$ et $\pi_5 = \pi_5 > 0$ et comme $\sum_{i=1}^{5} \pi_i = 1$ alors $\pi_5 = 1$ Donc la loi invariante $\pi = (0, 0, 0, 0, 1)$