1.5.3 Mesure positive invariante (stationnaire) pour une chaine de Markov

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une de Markov homogène, définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un espace d'états $(E, \mathcal{P}(E))$ de matrice de transition P. Soit π une mesure positive sur $(E, \mathcal{P}(E))$ pour tout $i \in E$ on note $\pi_i = \pi(\{i\})$ et π sera le vecteur de composantes $(\pi_i)_{i\in E}$ de dimension $card\,(E)$

Définition 16 *On dit que π mesure positive sur $(E, \mathcal{P}(E))$ est une mesure invariante de la chaine de markov si*

$$\pi P = \pi$$

* On prendra garde au fait que π n'est pas nécessairement une probabilité.

* Pour que π soit une probabilité invariante on doit avoir $\pi(E) = \sum\limits_{i\in E} \pi_i = 1$

* Observons que si π est une probabilité invariante et la loi initiale de X_0 est $\mu_0 = \pi$ alors la loi μ_n de X_n est aussi vérifie $\mu_n = \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6 Exercices

Exercise 6 (La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$) *On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendantes et de même loi, et Y_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendante des $(Y_n)_{n\geq 1}$. Posons*

$$X_0 = Y_0, \quad X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} Y_i, \quad \forall n \geq 0.$$

1. *Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.*

On suppose maintenant que Y_1 est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ de loi,

$$\mathbb{P}[Y_1 = 1] = p, \quad \mathbb{P}[Y_1 = -1] = 1 - p,$$

où $0 < p < 1$.

1. *Donner la matrice de transition et dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.*

Définition. *Si $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, $(X_n)_{n\geq 0}$ s'appelle la **marche aléatoire simple** sur $\mathbb{Z}$.*

Solution .

1. La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est à valeurs dans $E = \mathbb{Z}$. Pour tout $x_0, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0] &= \frac{\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n, X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0]} \\
&= \mathbb{P}[Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n] \quad \text{(indépendance)} \\
&= \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n].
\end{aligned}$$

Ainsi, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. De plus, on a montré que pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$,

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=y \mid X_n=x]=\mathbb{P}[Y_{n+1}=y-x]=\mathbb{P}[Y_1=y-x],$$

la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ étant identiquement distribuée. Cette quantité ne dépend pas de n et la chaîne est donc homogène.

2. La matrice de transition $P=(p(x,y))$ est de taille infinie. Les lignes et les colonnes sont indexées par $\mathbb{Z}$ et on a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{Z}^2,\quad p(x,y)=\mathbb{P}[X_{n+1}=y \mid X_n=x]=\mathbb{P}[Y_1=y-x].$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{Z}$, la x-ième ligne a pour seuls coefficients non nuls :

$$p(x,x-1)=1-p \quad \text{et} \quad p(x,x+1)=p.$$

Le graphe associé à cette chaîne de Markov est un graphe infini où chaque état x a une arête vers $x-1$ avec probabilité $1-p$ et une arête vers $x+1$ avec probabilité p.

Exercise 7 ***(Chaine d'Ehrenfest Eh**(d)**)*** *Soit d un entier $(d\geq 1)$. On répartit d boules numérotées dans deux urnes A et B. On tire un nombre i au hasard (c'est à dire suivant la loi uniforme) entre 1 et d et on change la boule numéroté i d'urne. Soit X_n le nombre de boules dans l'urne A après n tirages indépendants.*

1- Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une CM homogène.

2- Donner sa matrice de transition et son graphe

3- La chaine est elle irréductible.

Exercise 8 *On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E=\{1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition P donnée par*

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac34 & \frac14 \\ 0 & 0 & 0 & \frac14 & \frac34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- Dessigner le graphe de cette chaine 2- Déterminer les classes d'équivalences

3- La chaine est-elle irréductible 4- déterminer les périodes de chaque états

5) Calculer les probabilités $P_{1,4}^{(5)}$, $P_{3,4}^{(2)}$, $P\left(X_2=3\,|X_0=1\right)$, $P\left(X_4=4\,|X_0=2\right)$, $P\left(X_4=4\,|X_0=\right.$

6) Donner la loi de X_n dans le cas ou X_{n-1} prend que les deux valeurs 1 et 2 avec même probabilité

7) Déterminer les lois de probabilité invariantes de la chaine.

Solution

1- Graphe de cette chaine **(Voir Figure Graphe de la chaine)**

2- Déterminer les classes d'équivalences : On a