

1.5 Transitions d'Ordre n et Loi à l'Instant n

Nous pouvons maintenant étudier les transitions d'ordre n d'une chaîne de Markov et en déduire sa loi à l'instant n . Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur E .

Pour tout $n \geq 0$, notons μ_n la loi de $(X_n)_{n \geq 0}$ à l'instant n :

$$\forall x \in E, \quad \mu_n(x) = \mathbb{P}[X_n = x].$$

Pour tout $n \geq 0$, notons $P^{(n)} = (P^{(n)}(x, y))$ la matrice des transitions d'ordre n :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad P^{(n)}(x, y) = \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x].$$

Proposition 1 Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P .

* Pour tout $k \geq 0$, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\mathbb{P}[X_{n+k} = y \mid X_k = x] = P^{(n)}(x, y) = P^n(x, y).$$

ou $P^n(x, y)$ est l'élément (x, y) dans la matrice P^n

* La loi à l'instant n est donnée par

$$\mu_n = \mu_0 P^n, \quad \text{autrement dit,} \quad \forall y \in E, \quad \mathbb{P}[X_n = y] = \sum_{x \in E} \mathbb{P}[X_0 = x] P^n(x, y).$$

Démonstration. Démontrons le premier point. Il suffit de montrer que pour tout $k \geq 0$, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\mathbb{P}[X_{n+k} = y \mid X_k = x] = P^n(x, y).$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+k} = y \mid X_k = x] &= \sum_{x_{k+1}, \dots, x_{n+k-1} \in E} \mathbb{P}[X_{n+k} = y, X_{n+k-1} = x_{n+k-1}, \dots, X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x] \\ &= \sum_{x_{k+1}, \dots, x_{n+k-1} \in E} p(x, x_{k+1}) p(x_{k+1}, x_{k+2}) \dots p(x_{n+k-1}, y) \quad (\text{d'après le Cor.2}) \\ &= P^n(x, y) \quad (\text{par définition du produit matriciel}). \end{aligned}$$

Pour le deuxième point, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales, pour tout $y \in E$,

$$\mathbb{P}[X_n = y] = \sum_{x \in E} \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] \mathbb{P}[X_0 = x] = \sum_{x \in E} \mu_0(x) P^n(x, y),$$

en utilisant les notations introduites et le premier point.

Nous pouvons en déduire les équations importantes suivantes..

Corollaire 3 (Équations de Chapman-Kolmogorov) Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P . Alors les matrices de transitions d'ordre $n + m$ et n, m satisfont à la relation suivante :

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}. \quad (6.3)$$

En explicitant les notations, ceci s'écrit aussi :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \mathbb{P}[X_{n+m} = y \mid X_0 = x] = \sum_{z \in E} \mathbb{P}[X_n = z \mid X_0 = x] \mathbb{P}[X_m = y \mid X_0 = z].$$

Démonstration. L'égalité (6.3) découle immédiatement de la proposition précédente et de la définition du produit matriciel.

1.5.1 Classification des États

L'espace des états étant souvent de grande taille, il est utile de le partitionner en des sous-ensembles dont les éléments ont les mêmes comportements au regard de propriétés importantes. Pour ce faire, nous introduisons une relation d'équivalence sur les états.

Classes de Communication

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur un espace d'états E , de matrice de transition P .

Définition 12

Soient deux états x et y . Nous dirons que x **conduit à** y ou que y est **accessible depuis** x , noté $x \rightarrow y$, si :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad P^{(n)}(x, y) = \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] > 0. \quad (7.1)$$

Cette relation signifie que partant de x nous avons une probabilité non nulle d'atteindre y à un certain temps n .

Nous dirons que x **communique avec** y , noté $x \leftrightarrow y$, si chacun des états x, y est accessible depuis l'autre, c'est-à-dire $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$.

Proposition 2 La relation de communication $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence.

Démonstration.

Réflexivité : $x \leftrightarrow x$. Immédiat en observant que

$$P^{(0)}(x, x) = \mathbb{P}[X_0 = x \mid X_0 = x] = 1.$$

Symétrie : $x \leftrightarrow y \Rightarrow y \leftrightarrow x$. Évident par définition.

Transitivité : $x \leftrightarrow y$ et $y \leftrightarrow z \Rightarrow x \leftrightarrow z$. Pour cela, il suffit de montrer la transitivité de la relation d'accessibilité. Supposons que $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow z$. Alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $P^{(n)}(x, y) > 0$ et $P^{(m)}(y, z) > 0$. Or, d'après les équations de Chapman-Kolmogorov, on a

$$P^{(n+m)}(x, z) = \sum_{y' \in E} P^{(n)}(x, y') P^{(m)}(y', z) > 0.$$

La première inégalité provient du fait que tous les termes de la somme sont positifs ou nuls. En conséquence, $x \rightarrow z$.

Définition 13

Les états E de la chaîne peuvent être partitionnés en classes d'équivalence appelées **classes irréductibles**. Si E est réduit à une seule classe, la chaîne de Markov est dite **irréductible**.

La relation d'accessibilité s'étend aux classes : une classe d'équivalence C' est accessible depuis une classe C , noté $C \rightarrow C'$, si

$$\forall (x, x') \in C \times C', \quad x \rightarrow x'.$$

À noter l'équivalence :

$$\forall (x, x') \in C \times C', \quad x \rightarrow x' \quad \Leftrightarrow \quad \exists (x, x') \in C \times C', \quad x \rightarrow x'.$$

La relation d'accessibilité définit une relation d'ordre partiel entre les classes d'équivalence.

Une classe d'équivalence C est dite **fermée** si, pour tout x, y tels que $(x \in C \text{ et } x \rightarrow y) \Rightarrow y \in C$. Autrement dit, $\forall x \in C, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{y \in C} P^{(n)}(x, y) = 1$, autrement dit encore C est une classe dont on ne peut pas sortir.

Une classe fermée réduite à un point $C = \{x\}$ est appelée un **état absorbant**. Un état x est absorbant ssi $p(x, x) = 1$.

1.5.2 Période

Dans cette partie, nous étudions la période associée à une classe.

Définition 14 Étant donné un état $x \in E$, la **période** de l'état x , notée $d(x)$, est le plus grand commun diviseur des entiers n tels que $P^{(n)}(x, x)$ est strictement positif :

$$d(x) = \text{PGCD}\{n \geq 1 \mid P^{(n)}(x, x) > 0\}. \quad (7.2)$$

Par convention, $d(x) = 0$ si l'ensemble des $n > 1$ tels que $P^{(n)}(x, x) > 0$ est vide.

Nous avons le résultat suivant, qui montre que la notion de période est une notion de classe.

Théorème 4 Si deux états communiquent, alors ils ont même période.

Démonstration. Soient x et y deux états qui communiquent, $x \leftrightarrow y$. Montrons que $d(y)$ divise $d(x)$. Ceci revient à prouver que $d(y)$ divise tout $n \geq 1$ tel que $P^{(n)}(x, x) > 0$; soit donc un tel n . Comme x et y communiquent, il existe deux entiers $k, l \geq 1$ tels que $P^{(k)}(x, y) > 0$ et $P^{(l)}(y, x) > 0$. De plus, d'après les équations de Chapman-Kolmogorov :

$$P^{(n+k+l)}(y, y) \geq P^{(l)}(y, x)P^{(n)}(x, x)P^{(k)}(x, y) > 0, \quad \text{et} \quad P^{(k+l)}(y, y) \geq P^{(l)}(y, x)P^{(k)}(x, y) > 0.$$

Ainsi, $d(y)$ divise $n + k + l$ et $k + l$; et par suite divise la différence n . On a donc montré que $d(y)$ divise $d(x)$. En intervertissant les rôles de x et y , nous prouvons que $d(x)$ divise $d(y)$, ce qui entraîne que $d(x) = d(y)$.

Définition 15 La **période d'une classe** est la période de chacun de ses éléments. Une classe est dite **apériodique** si sa période est 1.