1.4 Dynamique d'une Chaîne de Markov

Dans cette section, nous donnons une caractérisation d'une chaîne de Markov et étudions son évolution dans le temps.

1.4.1 Caractérisation d'une Chaîne de Markov

Le but de cette section est de caractériser une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à partir de sa matrice de transition et de la loi initiale.

Définition 11 *Soit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E, nous appelons **loi initiale** la loi μ_0 de la variable aléatoire X_0 :*

$$\forall x \in E, \quad \mu_0(x) = \mathbb{P}[X_0 = x].$$

Le théorème suivant montre que la donnée de la loi initiale μ_0 et de la matrice de transition P caractérise une chaîne de Markov.

Théorème 2 *Un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov de loi initiale μ_0 et de matrice de transition P si et seulement si, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$:*

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n] = \mu_0(x_0)p(x_0, x_1)\dots p(x_{n-1}, x_n). \quad (6.1)$$

Démonstration. Supposons que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et montrons l'égalité (6.1). En utilisant la formule,

$$\mathbb{P}[A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n] = \mathbb{P}[A_0]\mathbb{P}[A_1 \mid A_0]\dots\mathbb{P}[A_n \mid A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}]$$

et la propriété de Markov. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_0 &= x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_0 = x_0]\mathbb{P}[X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0]\dots \\
...\mathbb{P}[X_n &= x_n \mid X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}] \\
&= \mathbb{P}[X_0 = x_0]\mathbb{P}[X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0]\dots\mathbb{P}[X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}] \\
&= \mu_0(x_0)p(x_0, x_1)\dots p(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

d'où l'égalité (6.1).

Supposons maintenant que l'équation (6.1) est vraie. En l'appliquant pour $n = 0$ on obtient, pour tout $x_0 \in E$, $\mathbb{P}[X_0 = x_0] = \mu_0(x_0)$. Pour tout $n \geq 0$, nous obtenons en utilisant la définition de probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_{n+1} &= x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0] = \frac{\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0]} \\
&= \frac{\mu_0(x_0)p(x_0, x_1)\dots p(x_n, x_{n+1})}{\mu_0(x_0)p(x_0, x_1)\dots p(x_{n-1}, x_n)} \quad \text{(d'après (6.1))} \\
&= p(x_n, x_{n+1}). \quad (6.2)
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule des probabilités totales et la définition des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n] &= \\
\sum_{x_0,\dots,x_{n-1}\in E} \mathbb{P}[X_{n+1} &= x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0] \frac{\mathbb{P}[X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_n = x_n]} \\
&= \sum_{x_0,\dots,x_{n-1}\in E} p(x_n, x_{n+1}) \frac{\mathbb{P}[X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_n = x_n]} \quad \text{(d'après (6.2))} \\
&= p(x_n, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n] = p(x_n, x_{n+1}).$$

La propriété de Markov est vérifiée et la matrice de transition est $P = (p(x, y))$.
Du Théorème précédent, nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 2 *La loi d'une chaîne de Markov est invariante par translation dans le temps. Autrement dit, pour tout $(x_0, \dots, x_{n+m}) \in E^{n+m+1}$ tels que $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] > 0$,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_{n+m} &= x_{n+m}, \dots, X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0] \\
&= \mathbb{P}[X_m = x_{n+m}, \dots, X_1 = x_{n+1} \mid X_0 = x_n] \\
&= p(x_n, x_{n+1}) \dots p(x_{n+m-1}, x_{n+m}).
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la définition des probabilités conditionnelles et le Théorème précédent, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_{n+m} &= x_{n+m}, \dots, X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0] \\
&= \frac{\mathbb{P}[X_{n+m} = x_{n+m}, \dots, X_0 = x_0]}{\mathbb{P}[X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0]} \\
&= \frac{\mu_0(x_0) p(x_0, x_1) \dots p(x_{n+m-1}, x_{n+m})}{\mu_0(x_0) p(x_0, x_1) \dots p(x_{n-1}, x_n)} \quad \text{(d'après le Théorème 2)} \\
&= p(x_n, x_{n+1}) \dots p(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\
&= \frac{\mathbb{P}[X_m = x_{n+m}, \dots, X_0 = x_n]}{\mathbb{P}[X_0 = x_n]} \quad \text{(d'après le Théorème 2)} \\
&= \mathbb{P}[X_m = x_{n+m}, \dots, X_1 = x_{n+1} \mid X_0 = x_n].
\end{aligned}$$

La question qui se pose à cette étape, est celle de l'existence d'une chaîne de Markov, c'est-à-dire de l'existence du processus $(X_n)_{n\geq 0}$ dont les marginales sont données par (6.1). Le théorème suivant donne la réponse. Il se démontre en utilisant le théorème d'extension de Kolmogorov.

Théorème 3 *Étant donné une probabilité μ_0 sur un ensemble discret E et une matrice stochastique P sur E, nous pouvons leur associer une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ dont les marginales sont données par (6.1).*