

Exercices sur Vecteurs aléatoires et lois conjointes

Exercice 1 : Vecteur de Bernoulli

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$. On définit le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

1. Donner la loi conjointe de $\mathbf{X}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 2)$.
3. Soit $M = \max(X_1, X_2, X_3)$. Déterminer la loi de M .

Solution exercice 1 : Vecteur de Bernoulli

1. Comme les X_i sont indépendantes et $X_i \sim \mathcal{B}(0,4)$, on a pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1\}^3$:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = (0,4)^{x_1+x_2+x_3} (0,6)^{3-(x_1+x_2+x_3)}.$$

2. $X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathcal{B}(3, 0,4)$, donc :

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 2) = \binom{3}{2} (0,4)^2 (0,6) = 3 \cdot 0,16 \cdot 0,6 = 0,288.$$

3. $M = \max(X_1, X_2, X_3) \in \{0, 1\}$. On a :

$$\mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3 = 0) = (0,6)^3 = 0,216,$$

$$\mathbb{P}(M = 1) = 1 - 0,216 = 0,784.$$

Exercice 2 : Vecteur de Poisson

Soient N_1 et N_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson de paramètres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

1. Donner la loi conjointe de (N_1, N_2) .
2. Calculer $\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 4)$.
3. Soit $S = \min(N_1, N_2)$. Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$.

Solution exercice 2 : Vecteur de Poisson

1. Indépendance implique :

$$\mathbb{P}(N_1 = k, N_2 = \ell) = e^{-2} \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-3} \frac{3^\ell}{\ell!} = e^{-5} \frac{2^k 3^\ell}{k! \ell!}, \quad k, \ell \in \mathbb{N}.$$

2. $N_1 + N_2 \sim \mathcal{P}(2 + 3) = \mathcal{P}(5)$, donc :

$$\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 4) = e^{-5} \frac{5^4}{4!} = e^{-5} \cdot \frac{625}{24} \approx 0,1755.$$

3. $S = \min(N_1, N_2) = 0$ si au moins l'une des deux vaut 0 :

$$\mathbb{P}(S = 0) = 1 - \mathbb{P}(N_1 \geq 1, N_2 \geq 1) = 1 - (1 - e^{-2})(1 - e^{-3}) = e^{-2} + e^{-3} - e^{-5}.$$

Exercice 3 : Transformations max et min

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, uniformément distribuées sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$.
2. Déterminer la loi de $V = \max(X, Y)$.
3. Calculer $\mathbb{E}[U]$ et $\mathbb{E}[V]$.

Solution exercice 3 : min et max de variables discrètes

Les couples (X, Y) sont uniformes sur $\{1, 2, 3, 4\}^2$ (16 cas équiprobables).

1. Pour $u \in \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\mathbb{P}(U \geq u) = \mathbb{P}(X \geq u, Y \geq u) = \left(\frac{5-u}{4}\right)^2.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(U = u) = \mathbb{P}(U \geq u) - \mathbb{P}(U \geq u + 1) = \left(\frac{5-u}{4}\right)^2 - \left(\frac{4-u}{4}\right)^2.$$

Calculs :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U = 1) &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}, \\ \mathbb{P}(U = 2) &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{9-4}{16} = \frac{5}{16}, \\ \mathbb{P}(U = 3) &= \left(\frac{2}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4-1}{16} = \frac{3}{16}, \\ \mathbb{P}(U = 4) &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

2. De même, $\mathbb{P}(V \leq v) = \left(\frac{v}{4}\right)^2$, donc :

$$\mathbb{P}(V = v) = \left(\frac{v}{4}\right)^2 - \left(\frac{v-1}{4}\right)^2.$$

On obtient :

$$\mathbb{P}(V = 1) = \frac{1}{16}, \quad \mathbb{P}(V = 2) = \frac{3}{16}, \quad \mathbb{P}(V = 3) = \frac{5}{16}, \quad \mathbb{P}(V = 4) = \frac{7}{16}.$$

3.

$$\mathbb{E}[U] = 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{3}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7 + 10 + 9 + 4}{16} = \frac{30}{16} = 1,875.$$

$$\mathbb{E}[V] = 1 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{7}{16} = \frac{1 + 6 + 15 + 28}{16} = \frac{50}{16} = 3,125.$$

Exercice 4 : Supremum et infimum de variables continues

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité commune :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $I = \inf(X, Y)$ et $S = \sup(X, Y)$.

1. Calculer la fonction de répartition de I .
2. En déduire la densité de I .
3. Calculer $\mathbb{E}[I]$.

Solution exercice 4 : inf de variables continues

On rappelle que pour X, Y i.i.d. :

$$F_I(t) = \mathbb{P}(I \leq t) = 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) = 1 - (1 - F_X(t))^2.$$

La fonction de répartition de X est :

$$F_X(t) = \int_0^t 2x \, dx = t^2, \quad 0 < t < 1.$$

1. Donc :

$$F_I(t) = 1 - (1 - t^2)^2 = 1 - (1 - 2t^2 + t^4) = 2t^2 - t^4, \quad 0 < t < 1.$$

2. Densité : $f_I(t) = F_I'(t) = 4t(1 - t^2)$, pour $0 < t < 1$.

Espérance :

$$\mathbb{E}[I] = \int_0^1 t \cdot 4t(1 - t^2) \, dt = 4 \int_0^1 (t^2 - t^4) \, dt = 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{15}.$$

1 Exercice 5 : Loi conjointe discrète

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0,1	0,2	0,1
$X = 1$	0,2	0,3	0,1

1. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution exercice 5 : Loi conjointe discrète

1. La somme de toutes les probabilités vaut :

$$0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 = 1.$$

Donc il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. Lois marginales :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4,$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,6.$$

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 0,1 + 0,2 = 0,3,$$

$$\mathbb{P}(Y = 1) = 0,2 + 0,3 = 0,5,$$

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 0,1 + 0,1 = 0,2.$$

3. $\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0,1 + 0,3 = 0,4.$
4. Vérifions l'indépendance : par exemple,

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0,1 \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = 0,4 \times 0,3 = 0,12.$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 6 : Densité conjointe continue

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à densité sur $\mathbb{R}^2$ de densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{si } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c pour que $f_{X,Y}$ soit bien une densité.
2. Calculer les densités marginales f_X et f_Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, et $\mathbb{E}[XY]$.

Solution exercice 6 : Densité conjointe continue

1. On impose $\int_0^1 \int_0^2 c xy \, dy \, dx = 1$. Calculons :

$$\int_0^1 x \, dx \int_0^2 y \, dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Donc $c = 1$.

2. Densité marginale de X :

$$f_X(x) = \int_0^2 xy \, dy = x \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

Densité marginale de Y :

$$f_Y(y) = \int_0^1 xy \, dx = y \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{y}{2}, \quad 0 < y < 2.$$

3. On a $f_{X,Y}(x,y) = xy = (2x) \cdot \left(\frac{y}{2}\right) = f_X(x)f_Y(y)$. Donc X et Y sont indépendantes.
4.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^2 y \cdot \frac{y}{2} \, dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y^2 \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^2 xy \cdot xy \, dy \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx \int_0^2 y^2 \, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{9}.$$

(On aurait aussi pu utiliser l'indépendance : $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$.)

Exercice 7 : Transformation de variables

Soit (U, V) un vecteur aléatoire de densité conjointe :

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < u < v < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit $X = U$ et $Y = V - U$.

1. Déterminer le support de (X, Y) .
2. Calculer la densité conjointe de (X, Y) .
3. En déduire les densités marginales de X et Y .
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution exercice 7 : Transformation de variables

1. Puisque $0 < u < v < 1$, et $x = u$, $y = v - u$, on a $x > 0$, $y > 0$, et $x + y = v < 1$.
Donc le support est :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

2. La transformation $(u, v) \mapsto (x, y) = (u, v - u)$ est bijective, de jacobien :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc $|J| = 1$, et

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{U,V}(x, x + y) \cdot |J| = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0, y > 0, x + y < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Densité marginale de X :

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2 \, dy = 2(1 - x), \quad 0 < x < 1.$$

Densité marginale de Y :

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2 \, dx = 2(1 - y), \quad 0 < y < 1.$$

4. On a $f_{X,Y}(x, y) = 2$, mais $f_X(x)f_Y(y) = 4(1 - x)(1 - y) \neq 2$ en général. Donc X et Y ne sont ****pas indépendantes****.

Exercice 8 : Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire discret tel que :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{12}, \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

1. Vérifier que cette définition est cohérente.
2. Calculer la loi marginale de X et de Y .
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = 2$.
4. Calculer $\mathbb{E}[Y \mid X = 2]$.

Solution exercice 8 : Loi conditionnelle

1. Il y a $3 \times 4 = 12$ couples (i, j) . Chaque probabilité vaut $1/12$, donc la somme vaut $12 \cdot (1/12) = 1$. C'est bien une loi.

2. Loi marginale de X :

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Loi marginale de Y :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

3. Loi conditionnelle de Y sachant $X = 2$:

$$\mathbb{P}(Y = j \mid X = 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = j)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Donc $Y \mid (X = 2) \sim \mathcal{U}\{1, 2, 3, 4\}$.

4. $\mathbb{E}[Y \mid X = 2] = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5.$

Exercice 9 : Vecteur gaussien

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien de moyenne $\mu = (1, -2)$ et de matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la densité conjointe de (X, Y) .
2. Calculer $\mathbb{E}[X + Y]$ et $\text{Var}(X + Y)$.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.
4. Donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

Solution exercice 9 : Vecteur gaussien

1. La densité d'un vecteur gaussien $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ est :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - \mu)^\top \Sigma^{-1}(z - \mu)\right),$$

avec $z = (x, y)^\top$, $\mu = (1, -2)^\top$, et

$$\det \Sigma = 4 \cdot 9 - 1^2 = 35, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Par linéarité :

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 1 + (-2) = -1.$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y) = 4 + 9 + 2 \cdot 1 = 15.$$

3. X et Y sont **indépendantes si et seulement si** $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Ici, $\text{Cov}(X, Y) = 1 \neq 0$, donc elles ne sont **pas indépendantes**.

4. Pour un vecteur gaussien, la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est gaussienne de paramètres :

$$\mathbb{E}[Y \mid X = x] = \mu_Y + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(x - \mu_X) = -2 + \frac{1}{4}(x - 1),$$

$$\text{Var}(Y \mid X = x) = \text{Var}(Y) - \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{\text{Var}(X)} = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4}.$$

Donc :

$$Y \mid (X = x) \sim \mathcal{N}\left(-2 + \frac{x - 1}{4}, \frac{35}{4}\right).$$