

Processus aléatoires et fiabilité des systèmes

Ghoraf Namire

CHAPITRE 1

Généralités sur les processus aléatoires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire formellement la notion de processus aléatoire et de fournir une définition assez générale des chaînes de Markov particulièrement. Bien que nous avons essayé de saisir les concepts présentés, nous avons constaté qu'une lecture attentive pour mieux comprendre ces notions est nécessaire.

1.1 Notion de processus aléatoires

Lorsqu'on étudie l'évolution d'un phénomène ou d'un variable dans le temps, on peut rencontrer des situations où l'intervention d'un facteur aléatoire ou d'un grand nombre de facteurs explicatifs inconnus ne permet pas de prendre en compte l'ensemble des paramètres en jeu. Dans ces cas, on parle de processus aléatoire où l'aléa joue un rôle important dans la modélisation et la compréhension du phénomène étudié, quatre grands types de processus se dégagent rapidement dont voici des exemples :

- * Évolution de la température relevée tous les matins à 7 heures.
 - * Nombre mensuel d'immatriculations nouvelles relevées à Alger.
 - * Nombre de personnes "placées" dans le monde du travail par une société par mois.
- * Relevé par seconde de la dilatation d'un matériau sous l'effet de la chaleur.
 - * Évaluation sensorielle d'un produit à des instants différents.
 - * Relevé par heure de la concentration sanguine d'un certain type d'anticorps sur un patient.
- * Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique depuis le début de la journée, c à d. dans l'intervalle $[8h, t]$ pour $t \in [8h, 17h]$.
 - * Relevé en continu du nombre de voitures arrêtées à un feu rouge, nombre de clients à une caisse de supermarché ou à un guichet de banque.
- * Électrocardiogramme d'un patient
 - * Variation d'un indice boursier.
 - * Évolution de la proportion d'ozone dans l'atmosphère au cours de la journée dans une ville.

Ces processus peuvent être modélisés par la donnée d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, d'un espace probabilisable $(E, \mathcal{E})$, d'un ensemble T et d'une famille de v.a. $(X_t)_{t \in T}$ de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Les quatre grands types que nous avons vu précédemment sont différenciés par leur ensemble T , appelé espace des temps, et leur ensemble E , appelé espace d'états.

1.2 Processus aléatoires

Définition 1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On appelle processus aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et prend ses valeurs dans un ensemble E dit espace des états du processus une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires indicées par un paramètre réel positif. L'ensemble T représente un intervalle de temps, et le plus souvent la demi-droite $\mathbb{R}_+$. On note souvent par $(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in T})$ pour plus de précision. Nous étudierons des processus à valeurs entières ou réelles.

Pour une éventualité du hasard ω fixée, l'application qui à t associe la valeur $X_t(\omega)$ s'appelle une trajectoire du processus. Les trajectoires constituent généralement les observations concrètes que l'on peut faire d'un processus. Par exemple, les journaux publient chaque jour les trajectoires des valeurs boursières.

* Dans le cas particulier des chaînes où le temps est l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$, la trajectoire associée à ω est l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow E \\ n &\longmapsto X_n(\omega). \end{aligned}$$

* Un processus est à valeurs réelles si.

$$X_t \in \mathbb{R}, \text{ pour } t \geq 0$$

* Un processus est à valeurs entières si :

$$X_t \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

les exemples de processus à valeurs entières sont les processus de Poisson, les processus de renouvellement liés au comptage d'événements survenus au hasard, et par exemple les processus liés à l'état d'une file d'attente. Dans les files d'attente, la variable X_t représente en général le nombre de clients dans un système. Ce nombre peut croître ou décroître en fonction des durées et des stratégies de service. Les processus de branchement décrivant la taille d'une population sont aussi des exemples importants.

1.2.1 Loi d'un processus

Définition 2 On appelle loi du processus $(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in T})$, la loi image P_X de P par $X = (X_t)_{t \in T}$. La loi d'un processus est donc une probabilité sur l'ensemble des fonctions de T vers E .

Théorème 1 La loi d'un processus $(\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in T})$ est caractérisée par les valeurs de

$$P(\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B_1 \times \dots \times B_n\})$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, tout $(t_1, \dots, t_n)$ dans T^n et tout $B_1 \times \dots \times B_n$ dans $\mathcal{E}^n$ tq $\mathcal{E}$ est une tribu sur E . On dit encore que la loi P_X du processus X est caractérisée par l'ensemble des lois marges de dimension finie, c à d. par l'ensemble des lois $P_{(X_1, \dots, X_n)}$ de tout sous vecteur de dimension finie..

Définition 3 Un processus $(X_t)_{t \in T}$ tel que $X_0 = 0$ est à **accroissements indépendants** si, pour toute suite finie $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Définition 4 Un processus à accroissements indépendants est à **accroissements stationnaires** si la loi de l'accroissement $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend pas de t , $\forall t$.

1.2.2 Modification d'un processus et processus indistinguables

Définition 5 Soit $X = (\Omega, \mathcal{A}, P, (X_t)_{t \in T})$ et $X' = (\Omega, \mathcal{A}, P, (X'_t)_{t \in T})$, définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ayant même espace de temps T et même espace d'états E .

* On dit que le processus X est une **modification** du processus X' si pour tout t dans T , les v.a. X_t et X'_t sont presque sûrement égales.

* Ils sont dits **indistinguables** si l'on a P -presque-sûrement :

$$X_t = X'_t, \forall t \in T$$

Il est clair que deux processus modifications l'un de l'autre sont équivalents. Remarquons également que deux processus indistinguables sont modification l'un de l'autre mais, en revanche, la réciproque est fausse dès que l'espace des temps n'est pas dénombrable. L'indistinguabilité signifie qu'en dehors d'un ensemble négligeable sur Ω , toutes les trajectoires des deux processus coïncident ce que n'exigeait pas la notion de modification.

Remarque 1 Si deux processus sont modifications l'un de l'autre et s'ils sont tous les deux à trajectoires p.s continues alors, nécessairement, ils sont également indistinguables.

Exercice 1 Exemples de processus qui sont modifications l'un de l'autre et qui ne sont pas indistinguables

Soient $(X_t)_{t \in [0,1]}$ et $(X'_t)_{t \in [0,1]}$ deux processus définis sur le même espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]})$, où $\lambda_{[0,1]}$ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, et définis par :

$$X_t(\omega) = 1_{]t,1]}(\omega)$$

$$X'_t(\omega) = 1_{[t,1]}(\omega)$$

On a pour tout t dans $[0,1]$:

$$\lambda_{[0,1]}(X_t = X'_t) = \lambda_{[0,1]}(\{\omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega)\}) = \lambda_{[0,1]}([0,1] \setminus \{t\}) = 1.$$

Les processus $(X_t)_{t \in [0,1]}$ et $(X'_t)_{t \in [0,1]}$ sont donc modifications l'un de l'autre mais ne sont pas indistinguables puisque les trajectoires, pour ω quelconque dans Ω sont :

$$\begin{aligned} t &\longmapsto X_t(\omega) = 1_{[0,\omega[}(t) \\ t &\longmapsto X'_t(\omega) = 1_{[0,\omega]}(t) \end{aligned}$$

et sont donc toujours différentes.

Exercice 2 Soit $(X_t)_{t \in [0,1]}$ un processus déterministe, tel que : $X_t(\omega) = 1, \forall \omega \in \Omega$, et $\forall t \in [0,1]$.

Soit maintenant U une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$ et $(Y_t)_{t \in [0,1]}$ le processus défini, pour tout ω dans Ω par :

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = U(\omega) \\ 1 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

On a alors clairement, pour tout t dans $[0,1]$:

$$P(\{X_t = Y_t\}) = 1 - P(\{U = t\}) = 1.$$

Mais en revanche :

$$P(\{\forall t : X_t = Y_t\}) = 0.$$

1.3 Chaines de Markov

Les premiers processus étudiés sont, bien sûr, les suites de variables aléatoires indépendantes, ce qui a conduit à la loi des grands nombres et au théorème central limite. Le mathématicien russe Andrei Andreievitch Markov, poussé vers la théorie des probabilités par son maître, Pafnouti Lvovitch Tchebychev, qui démontra, sous des conditions assez générales, le théorème central limite, chercha à généraliser ce théorème à des suites de variables aléatoires dépendantes, pour répondre à une polémique entre lui et un mathématicien russe clérical et monarchiste. Il est amené ainsi à considérer des variables faiblement dépendantes, c'est-à-dire que l'évolution future ne dépend que de l'état présent, fondement de la théorie des processus auxquels fut donné son nom.

A.A. Markov est né à Riazan en 1856 et mort à Saint Petersburg en 1922, où il devint professeur en 1886 et où il fut membre de l'Académie des Sciences à partir de 1896. Il succéda à son maître, dont il fut le meilleur étudiant, comme professeur de probabilités. Ses premiers travaux de recherche se situent dans le domaine de la théorie des nombres et en analyse, ses recherches concernent tout particulièrement les fractions continues, les limites d'intégrales, la convergence des séries et la théorie de l'approximation.

1.3.1 Définitions et propriétés

Dans ce cours, nous allons étudier les processus de Markov, qui constituent les processus stochastiques les plus simples une fois l'hypothèse d'indépendance abandonnée. Nous supposons que l'ensemble T est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$; nous étudions donc les

chaînes de Markov. De plus, le maniement des probabilités discrètes étant plus simple que celui des probabilités continues et les exemples étant déjà très riches, nous étudions exclusivement des chaînes de Markov à valeurs dans un espace des états E dénombrable (fini ou infini), c'est-à-dire discret. L'espace E est muni de la tribu $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ des parties de E , ce que nous ne précisons plus dans la suite.

1.3.2 Propriété de Markov

Définition 6 Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace E discret est appelée **chaîne de Markov** si, pour tout $n \geq 0$ et pour toute suite $(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ d'éléments de E telle que la probabilité $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] > 0$, nous avons :

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]. \quad (5.1)$$

L'indice de la variable aléatoire étant assimilé au temps, X_n représente l'observation du processus à l'instant n . L'indice 0 représente l'instant de départ, il est appelé l'**instant initial** et l'état X_0 du processus en cet instant correspond à l'**état initial**.

L'égalité (5.1) est interprétée de la façon suivante : l'état x_{n+1} du processus à l'instant $n+1$ ne dépend pas du déroulement passé, $x_0, \dots, x_{n-1}$, mais seulement de l'état présent x_n . Ceci se traduit encore par : le déroulement futur est le même quel que soit le déroulement passé, s'il se retrouve dans le même état présent. Cette propriété est connue sous le nom de **propriété de Markov**.

1.3.3 Probabilités et Matrices de Transition

Nous voyons qu'il est fondamental de connaître la probabilité d'être dans un état y à l'instant suivant sachant que l'on est dans un état x à l'instant présent. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 7 Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace E . On appelle **probabilités de transition** la donnée, pour tout $n \geq 0$, pour tout $(x, y) \in E^2$, des

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = p_n(x, y).$$

Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est dite **homogène** si $p_n(x, y)$ ne dépend pas de l'instant n :

$$\forall n \geq 0, \forall (x, y) \in E^2, \quad p_n(x, y) = p(x, y). \quad (5.2)$$

En mots, cela signifie que la probabilité de transiter d'un état x à un état y ne dépend pas de l'instant auquel la transition se fait.

Dans la suite, nous supposons toujours que la chaîne de Markov est homogène et nous ne le mentionnons plus explicitement. Ceci n'est pas une restriction car, si une chaîne n'est pas homogène, nous pouvons toujours considérer le temps comme une dimension supplémentaire de l'espace des états.

Définition 8 Étant donné une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans un espace dénombrable $E = \{x_1, x_2, \dots\}$, nous lui associons une matrice appelée **matrice de transition**, notée $P = (p(x_i, x_j))$, dont les coefficients,

$$p_{ij} = p(x_i, x_j) = \mathbb{P}[X_1 = x_j \mid X_0 = x_i],$$

sont les probabilités de transiter de l'état x_i vers l'état x_j :

$$P = \begin{pmatrix} p(x_1, x_1) & p(x_1, x_2) & p(x_1, x_3) & \cdots \\ p(x_2, x_1) & p(x_2, x_2) & p(x_2, x_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Remarque 2 La matrice de transition est une matrice carrée de taille $\text{card}(E) \times \text{card}(E)$. Si l'espace E est fini, la matrice est de taille finie ; si l'espace des états est dénombrable infini, elle est alors infinie (voir par exemple le cas de la marche aléatoire où l'espace des états est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs). Cela ne pose pas de problème supplémentaire, la raison étant que cette matrice est à coefficients positifs ou nuls.

Une matrice de transition, de par sa construction, possède une propriété remarquable, qui est que chaque ligne correspond à une loi de probabilité. Nous détaillons ceci dans la section suivante.

Exemple 1 (Prévoir le temps) Un modèle simpliste d'évolution météorologique est le suivant. Supposons que la probabilité qu'il pleuve demain soit fonction des conditions météorologiques des jours précédents à travers le temps d'aujourd'hui uniquement. S'il pleut aujourd'hui, il pleuvra demain avec la probabilité α . S'il fait beau aujourd'hui, il pleuvra demain avec la probabilité β . On décrit l'évolution de la météo à l'aide d'un processus à deux états : 0 pour la pluie et 1 pour le beau temps.

Solution. Ce processus à deux états est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

On s'efforcera dans la suite de répondre aux questions suivantes. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'il pleuve dans quatre jours sachant qu'il pleut aujourd'hui ? Que devient cette probabilité si l'on remplace "quatre jours" par une durée plus longue ?

Exemple 2 (La ruine du joueur) Un joueur gagne 1 DA avec la probabilité p et perd 1 DA avec la probabilité $1 - p$ à chaque mise d'un jeu aléatoire dont les répétitions sont supposées indépendantes. Il quitte la partie lorsque sa fortune atteint la valeur r ou bien lorsqu'il est ruiné.

Solution. L'évolution de la fortune du joueur est décrite par une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0, \dots, r\}$ dont les probabilités de transition sont données par

$$p_{i,i+1} = p = 1 - p_{i,i-1}, \quad i = 1, \dots, r - 1$$

et

$$p_{0,0} = p_{r,r} = 1.$$

Dans ce cas, la matrice P est égale à

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsque la chaîne rentre dans les états 0 ou r , elle ne peut plus en sortir. Ces états sont dits absorbants.

1.3.4 Matrices Stochastiques

Soit P une matrice de transition associée à une chaîne de Markov. Étant donnée une ligne correspondant à un état x , les valeurs des colonnes décrivent tous les états possibles à l'étape suivante ; par suite, chaque ligne est une probabilité discrète. De telles matrices ont une très grande importance, au-delà du calcul des probabilités, d'où l'introduction des définitions qui suivent.

Définition 9 Une matrice carrée $P = (p(x, y))$, dont les lignes et colonnes sont indexées par un ensemble d'états E dénombrable (fini ou infini), telle que toutes les lignes sont des probabilités, s'appelle une **matrice stochastique**. Une matrice stochastique est donc caractérisée par les propriétés suivantes :

- 1) tous les coefficients sont positifs ou nuls : $\forall (x, y) \in E^2, p(x, y) \geq 0$,
- 2) les coefficients de chacune des lignes somment à 1 : $\forall x \in E, \sum_{y \in E} p(x, y) = 1$.

Exercice 3 Montrer que la matrice de transition $P = (p(x, y))$ associée à une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans E est une matrice stochastique.

Solution .: Par définition de la matrice de transition P , pour tout $(x, y) \in E^2$, est :

$$p(x, y) = \mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x].$$

Et on a, une probabilité conditionnelle est une probabilité. Ainsi, $\mathbb{P}[\cdot \mid \{X_n = x\}]$ est une probabilité. Ceci implique immédiatement la positivité de $p(x, y)$. Aussi, nous avons que pour tout $x \in E$,

$$\sum_{y \in E} p(x, y) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = \frac{\sum_{y \in E} \mathbb{P}[\{X_{n+1} = y\} \cap \{X_n = x\}]}{\mathbb{P}[X_n = x]} = \frac{\mathbb{P}[X_n = x]}{\mathbb{P}[X_n = x]} = 1.$$

Ceci démontre que les coefficients de chacune des lignes somment à 1 et conclut la preuve.

Exercice 4 Montrer que toute matrice stochastique $P = (p(x, y))$ admet une valeur propre égale à 1 et comme vecteur propre associé le vecteur, noté e , dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

Solution : Soit $P = (p(x, y))$ une matrice stochastique définie sur E ; pour établir que le vecteur $e = (e(x))$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, il suffit d'établir l'égalité :

$$Pe = e.$$

Or, nous obtenons pour tout x :

$$(Pe)(x) = \sum_{y \in E} p(x, y)e(y) = \sum_{y \in E} p(x, y) = 1,$$

la matrice P étant stochastique.

Exercice 5 *Montrer que le produit de deux matrices stochastiques indexées par le même ensemble E est encore une matrice stochastique.*

Solution. Soit $P = (p(x, y))$ et $Q = (q(x, y))$ deux matrices stochastiques. Appelons R la matrice produit $R = PQ = (r(x, y))$. Nous voyons premièrement que les coefficients de la matrice R sont positifs comme somme de produits de coefficients eux-mêmes positifs.

De plus, en effectuant la somme sur la ligne x des coefficients de la matrice R , nous obtenons, par définition du produit matriciel :

$$\sum_{y \in E} r(x, y) = \sum_{y \in E} \sum_{z \in E} p(x, z)q(z, y) = \sum_{z \in E} \sum_{y \in E} p(x, z)q(z, y) = \sum_{z \in E} p(x, z) \left(\sum_{y \in E} q(z, y) \right) = \sum_{z \in E} p(x, z) =$$

P et Q étant deux matrices stochastiques.

La matrice produit R est donc une matrice stochastique.

Nous pouvons en déduire immédiatement par récurrence le corollaire suivant, où P^n est la matrice P à la puissance n :

Corollaire 1 *Soit P une matrice stochastique, alors pour tout $n \geq 0$, la matrice P^n est encore une matrice stochastique.*

Démonstration. La propriété est vraie à l'ordre 0 et 1, la matrice P étant une matrice stochastique. Nous la supposons vraie à l'ordre $n - 1$, hypothèse de récurrence. Or, nous avons par définition du produit matriciel à l'ordre n :

$$P^n = P \cdot P^{n-1},$$

ce qui indique que la matrice P^n est une matrice stochastique comme produit de deux matrices stochastiques : P et P^{n-1} .

1.3.5 Graphe Associé à une Chaîne de Markov Homogène

À partir de la matrice de transition d'une chaîne de Markov, nous construisons un graphe. Il donne les mêmes informations que la matrice mais, comme toute représentation graphique, a l'avantage d'être plus parlant.

Définition 10 *Étant donnée une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ définie sur un espace d'états E , le **graphe de la chaîne** est le graphe construit à partir de la matrice de transition ainsi : les sommets sont les états et les arêtes (orientées) représentent les transitions possibles d'un état vers un autre. Au-dessus de chaque arête, on écrit la probabilité de transition correspondante.*