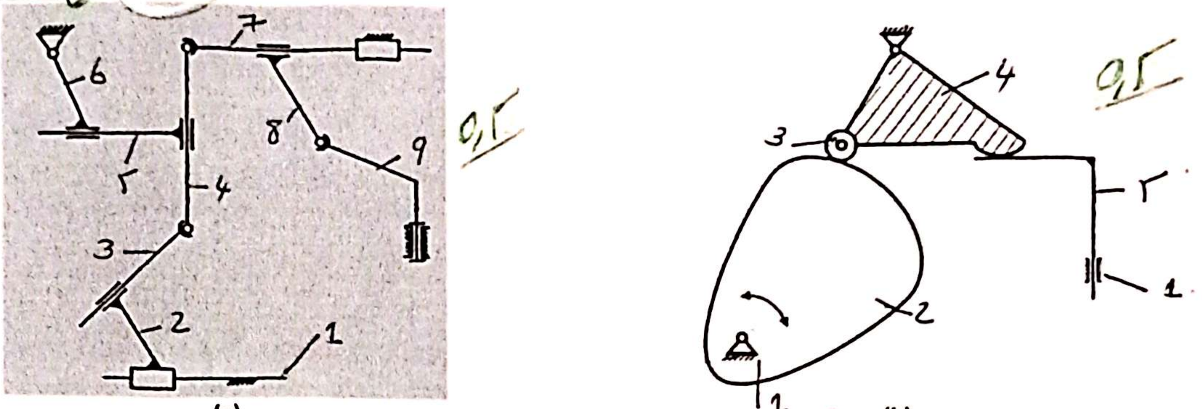
3ième année Licence . C.M.

EMD en Théorie des Mécanismes

**Corrigé Type**

**Exercice** (5/5)




(a) (b)

**Figure 1**

a- Mobilité du mécanisme Fig.1a : Mécanisme spatial

Formule de Grübler

$W = 6 \times n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1$ 0,75

$= 6 \times (9-1) - 5 \times 4 - 4 \times 4 - 3 \times 3$

$\Leftrightarrow W = 3$ ddL 0,5

b- Le Mécanisme de la figure 1b est à 1 ddL ; Paramètre d'entrée (1)

Mécanisme plan : $W = 3 \times n - 2 \times b - h = 3 \times (5-1) - 2 \times 4 - 2$ 0,5

$\Rightarrow W = 2$ ddL ?! $\neq 1$ 0,5

L'enlèvement du galet (3) n'influ pas sur la cinématique du mécanisme, c'est un élément passif utilisé seulement pour minimiser les frottement. On écrit : 0,75

0,5 $W = 3 \times (4-1) - 2 \times 3 - 2 \Rightarrow W = 1$ ddL – ok 0,5

**Problème**

1/ (9/9)

Paramétrage.

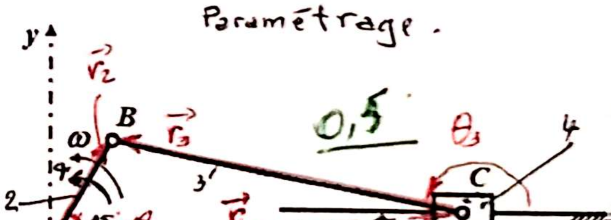



Figure 2

Eqn de fermeture de boucle :

$\sum_{k=1} \vec{r_k} = \vec{0} \rightarrow \vec{r_2} - \vec{r_3} - \vec{r_1} = \vec{0}$ 0,25

forme complexe : $r_2 e^{i\theta_2} - r_3 e^{i\theta_3} - (x_c + i L_a) = \vec{0}$ (*)

. Position : 0,5

l'éqn (*) donne :

$$\begin{cases} r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 - x_c = 0 & \text{— (1)} \\ r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 - L_a = 0 & \text{— (2)} \end{cases}$$

0,5 → inconnues $x_c$ et $\theta_3$ 0,5

• Calcul de $X_c$ →

$$\begin{cases} r_2 \cos\theta_2 - x_c = r_3 \cos\theta_3 & \text{-- (1)} \\ r_2 \sin\theta_2 - L_a = r_3 \sin\theta_3 & \text{-- (2)} \end{cases}$$

$(1)^2 + (2^2)$ donne :

$$A x_C^2 + B x_C + C = 0 \quad 0.1$$

avec

$A = 1$

$B = -2 r_2 \cos\theta_2 = -0{,}42$

$C = r_2^2 + L_a^2 - r_3^2 - 2 L_a r_2 \sin\theta_2 = -0{,}75$

$\Delta = B^2 - 4AC = 3{,}18$

$$x_C = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \rightarrow \begin{cases} x_C = 0{,}682\,m \\ \boxed{x_C = +1{,}102\,m} \end{cases} \quad 0.1$$

$$\frac{(2)}{(1)} \rightarrow \theta_3 = \text{arctg}\left\{\frac{r_2 \sin\theta_2 - L_a}{r_2 \cos\theta_2 - x_C}\right\} \quad 0.1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta_3 = -7{,}182^\circ \\ \theta_3 = 172{,}82^\circ \end{cases} \quad 0.1$$

• **Vitesses** : $\frac{d}{dt}\left\{(1) \text{ et } (2)\right\}$

$$\begin{cases} -r_2 \omega_2 \sin\theta_2 + r_3 \omega_3 \sin\theta_3 - \dot{x}_C = 0 \ \ldots (3) & 0.1 \\ r_2 \omega_2 \cos\theta_2 - r_3 \omega_3 \cos\theta_3 = 0 \ —— (4) & 0.1 \end{cases}$$

inconnues $\omega_3$ et $\dot{x}_C$.

forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} r_3 \sin\theta_3 & -1 \\ -r_3 \cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_3 \\ \dot{x}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_2 \omega_2 \sin\theta_2 \\ -r_2 \omega_2 \cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} r_2 \omega_2 \sin\theta_2 & -1 \\ -r_2 \omega_2 \cos\theta_2 & 0 \end{vmatrix}}{-r_3 \cos\theta_3} = \frac{r_2 \omega_2 \cos\theta_2}{r_3 \cos\theta_3} \quad 0.1$$

$$\dot{x}_C = \frac{\begin{vmatrix} r_3 \sin\theta_3 & r_2 \omega_2 \sin\theta_2 \\ -r_3 \cos\theta_3 & -r_2 \omega_2 \cos\theta_2 \end{vmatrix}}{-r_3 \cos\theta_3} \quad 0.1$$

$$\cancel{\cos}\ \dot{x}_C = r_2 \omega_2 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\cos\theta_3}$$

A.N. : $\omega_3 = -3{,}09\ \text{rad/s}$ 0.25

$\dot{x}_C = -3{,}11\ \frac{m}{s}$ 0.25

$\omega_3$ : vitesse angulaire de la bielle BC

$\dot{x}_C$ : vitesse du piston C

• **Accélérations** : $\frac{d^2}{dt^2}\left\{(1) \text{ et } (2)\right\}$.

$$\begin{cases} -r_2 \alpha_2 \sin\theta_2 - r_2 \omega_2^2 \cos\theta_2 + r_3 \alpha_3 \sin\theta_3 + r_3 \omega_3^2 \cos\theta_3 - \ddot{x}_C = 0 \ —— (5) & 0.1 \\ + r_2 \alpha_2 \cos\theta_2 - r_2 \omega_2^2 \sin\theta_2 - r_3 \alpha_3 \cos\theta_3 + r_3 \omega_3^2 \sin\theta_3 = 0 & 0.1 \ —(6) \end{cases}$$

inconnues $\alpha_3$ et $\ddot{x}_C$

acc. angulaire de la bielle ($\alpha_3$) et acc. du piston C $\rightarrow \ddot{x}_C$

forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} r_3 \sin\theta_3 & -1 \\ -r_3 \cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \ddot{x}_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ g \end{Bmatrix}.$$

$f = r_2 \alpha_2 \sin\theta_2 + r_2 \omega_2^2 \cos\theta_2 - r_3 \omega_3^2 \cos\theta_3$

$g = -r_2 \alpha_2 \cos\theta_2 + r_2 \omega_2^2 \sin\theta_2 - r_3 \omega_3^2 \sin\theta_3$

$f = 45{,}44 \quad ; \quad g = 33{,}72$

solution :

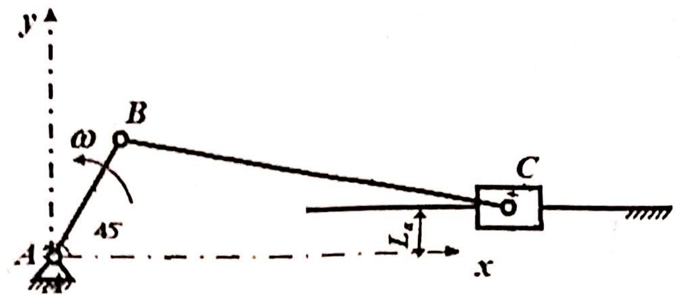
$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} f & -1 \\ g & 0 \end{vmatrix}}{-r_3 \cos\theta_3} = -\frac{g}{r_3 \cos\theta_3} \quad 0.1$$

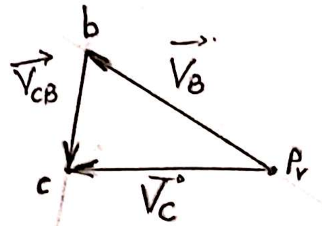
$$\ddot{x}_C = \frac{\begin{vmatrix} r_3 \sin\theta_3 & f \\ -r_3 \cos\theta_3 & g \end{vmatrix}}{-r_3 \cos\theta_3} = \frac{g \sin\theta_3 + f \cos\theta_3}{\cos\theta_3} \quad 0.1$$

A.N. $\rightarrow$ $\alpha_3 = 37{,}76\ \frac{\text{rad}}{s^2}$ 0.25

$\ddot{x}_C = 41{,}19\ \frac{m}{s^2}$ 0.25

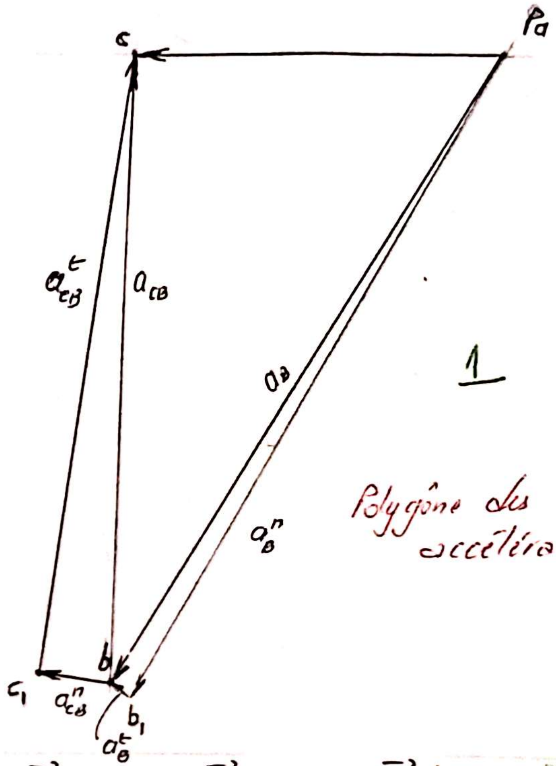
2/ 3/5,25




1

Polygône des vitesses




1

Polygône des accélérations.

$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}$ 0,25

dir. $/\!/\vec{Ax}$ $\perp AB$ $\perp CB$ 0,25

mod. ? $r_2\omega_2$ ?

$V_B = r_2 \cdot \omega_2 = 3{,}9\ \frac{m}{s}$

soit $p_v b = 3$ cm.

$k_v = \frac{V_B}{p_v b} = 1{,}3\ \frac{m/s}{cm}$.

Echelle → 1,3 $\frac{m}{s}$ → 1 cm

0,25 $V_C = p_v c \times k_v = 2{,}9^{cm} \times 1{,}3 = 3{,}77\ \frac{m}{s}$

0,25 $\omega_3 = \frac{V_{CB}}{r_3} = \frac{cb \times k_v}{r_3} = 2{,}38\ \frac{rad}{s}$

$\vec{a}_c = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$ 0,25

0,25 $\vec{a}_c = \vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} + \vec{a}_{CB}^{\,n} + \vec{a}_{CB}^{\,t}$

dir. $/\!/\vec{Ax}$ $/\!/ BA$ $\perp BA$ $/\!/ CB$ $\perp CB$

mod. ? $-r_2\omega_2^2$ $r_2\alpha_2$ $-r_3\omega_3^2$ ?

$a_B^n = r_2\omega_2^2 = 50{,}7\ \frac{m}{s^2}$

soit $p_a b_1 = 10$ cm → $k_a = \frac{50{,}7}{10} = 5{,}07\ \frac{m/s^2}{cm}$

$a_B^t = r_2\alpha_2 = 1{,}5\ \frac{m}{s^2}$ sur l'épure $b_1 b = 0{,}3$ cm.

$a_{CB}^n = r_3\omega_3^2 = 5{,}10\ \frac{m}{s^2}$ sur l'épure $bc_1 = 1$ cm.

$a_c = p_a c \times k_a = 42{,}6\ \frac{m}{s^2}$ 0,25

$\alpha_3 = \frac{a_{CB}^t}{r_3} = \frac{cc_1 \times k_a}{r_3} = 46{,}76\ \frac{rad}{s^2}$ 0,25