TD N° 1

Poussée et butée :

Rappel de Cours

Plusieurs méthodes sont utilisées pour la determination des forces de poussées et butées. On va utilisés la methode de Rankine.

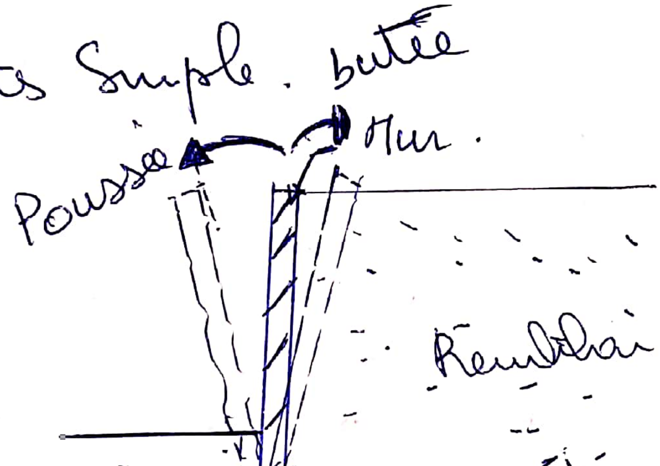
Methode de Rankine :

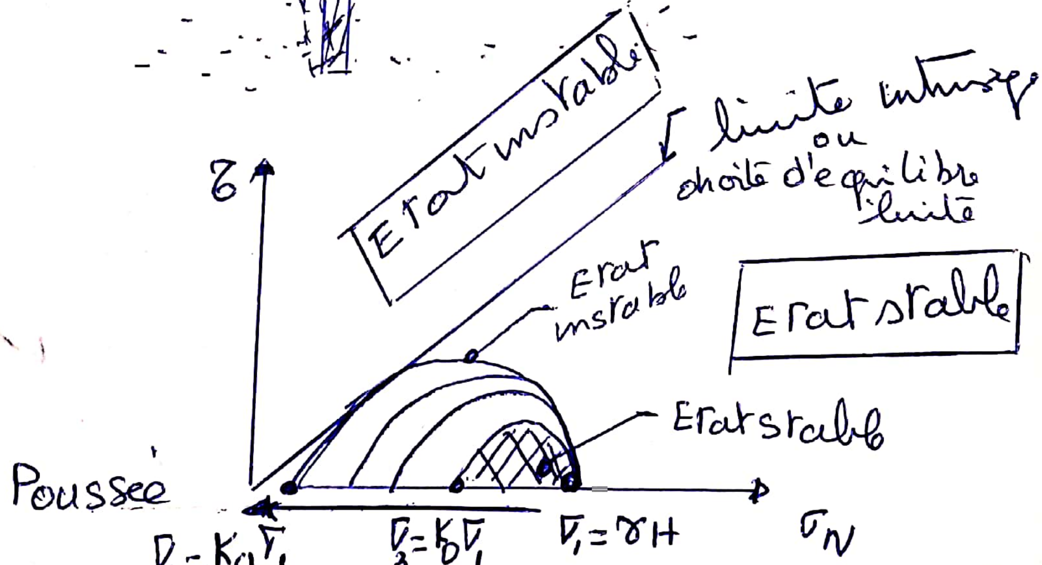
La Forces de Poussée ou butée ⊥ à La Surface du mur.

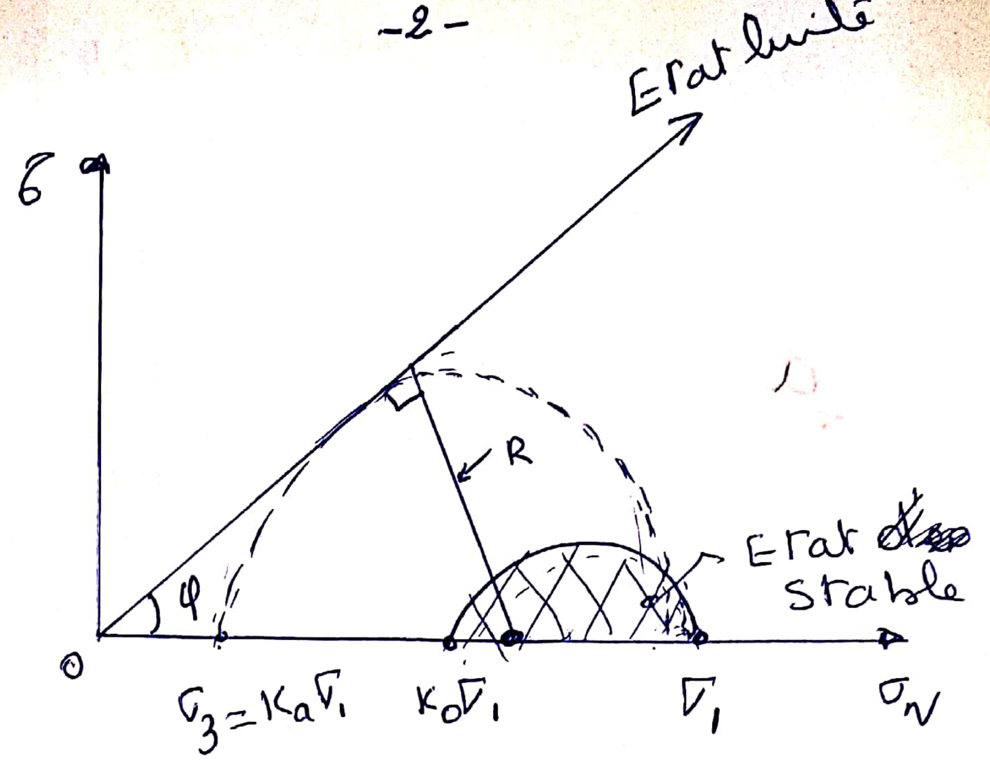
Pas de frottement entre Murs. et (les) Remblais

$\delta = 0$.

Methode très Simple.







$$\sin\varphi = \frac{R}{\sigma_3 + R} = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{\sigma_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\cancel{2}}}{\frac{2\sigma_3 + \sigma_1 - \sigma_3}{\cancel{2}}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$$

$$\sin\varphi\,(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 \Rightarrow$$

$$\sigma_3 (1 + \sin\varphi) = \sigma_1 (1 - \sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_3 = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} \cdot \sigma_1}$$

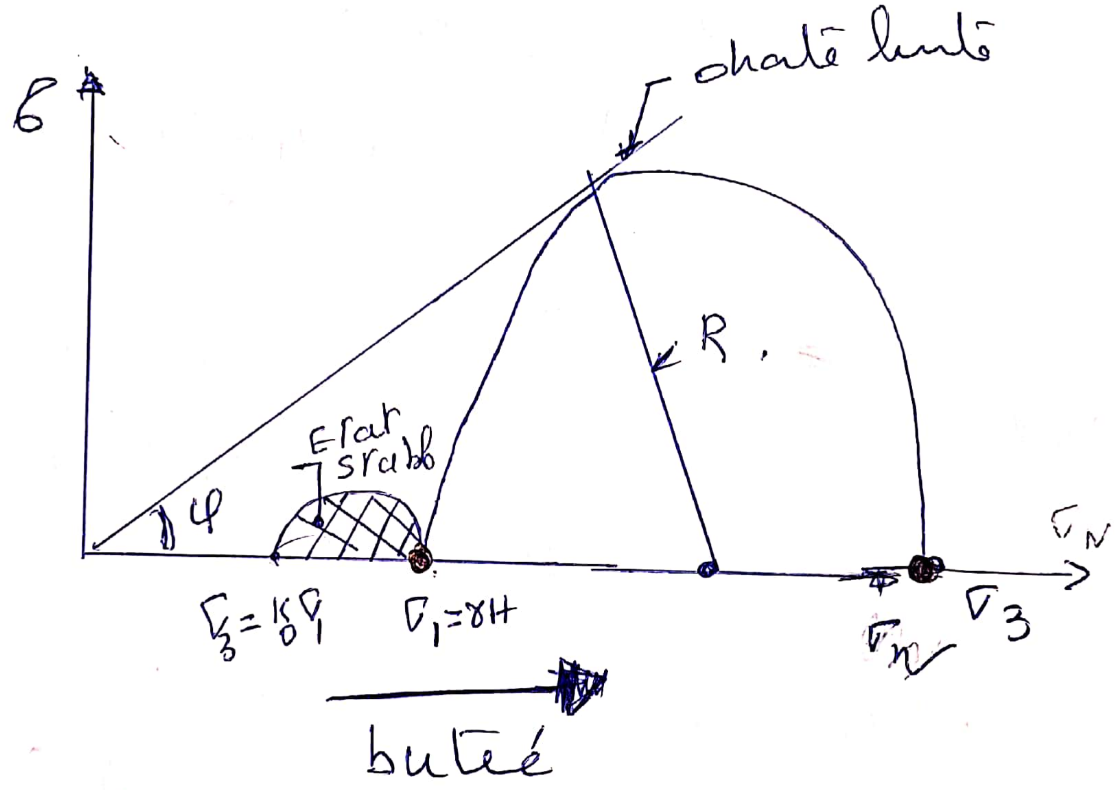
$$K_a = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Ka = est appelé coefficient de poussée active.

$$\boxed{\sigma_a = K_a \cdot \sigma_1}$$

contrainte de poussée

De la même manière, on va déterminer la contrainte de butée.



$$\sin\varphi = \frac{R}{\sigma_1 + R} = \frac{\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}}{\sigma_1 + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3}$$

$$\sin\varphi(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_3 - \sigma_1$$

$$\Rightarrow \sin\varphi\,\sigma_1 + \sin\varphi\,\sigma_3 = \sigma_3 - \sigma_1$$

$$\Rightarrow \sin\varphi\,\sigma_3 - \sigma_3 = -\sin\varphi\,\sigma_1 - \sigma_1$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = \sigma_1 \frac{(1+\sin\varphi)}{1-\sin\varphi}.$$

On appelle σ_p : contrainte de butée.

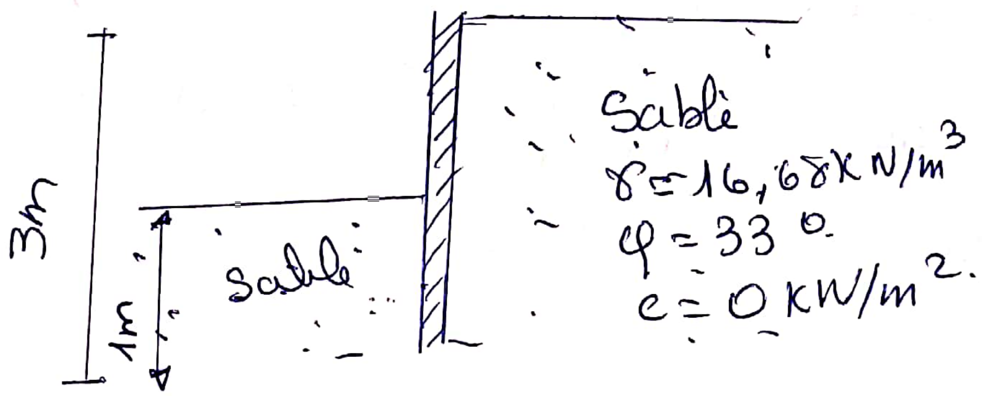
$$\boxed{\sigma_3 = \sigma_p = \sigma_1 \cdot K_p}$$ ← coefficient de butée.

avec $$\boxed{K_p = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\boxed{K_p = \frac{1}{K_a}}$$

Exemple d'application :

Soit à déterminer la contrainte de poussée et la contrainte de butée.



1- Déterminons la contrainte et la force de poussée

$$K_a = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi} = tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) =$$

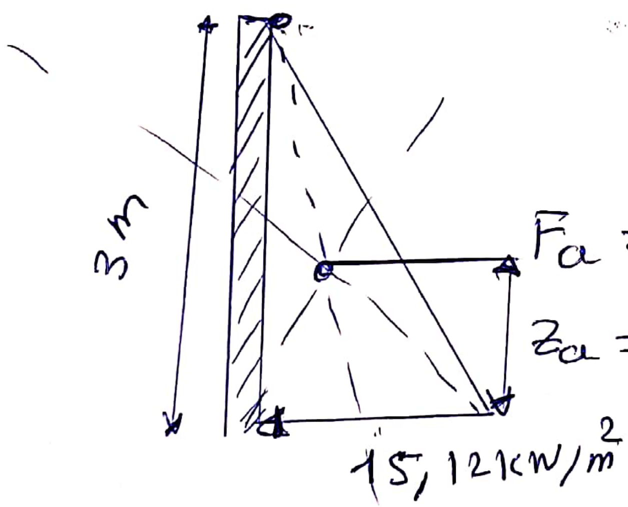
$$= \frac{1-\sin 33°}{1+\sin 33°} \approx 0,3$$

pour $0 \leq Z \leq 3$.

$\sigma_a = K_a . \sigma_1 = K_a . \gamma . Z$

$Z = 0 \Rightarrow \sigma_a = 0$

$Z = 3m \Rightarrow \sigma_a = K_a . 16,8 . 3 = 15,12$ KN/m²



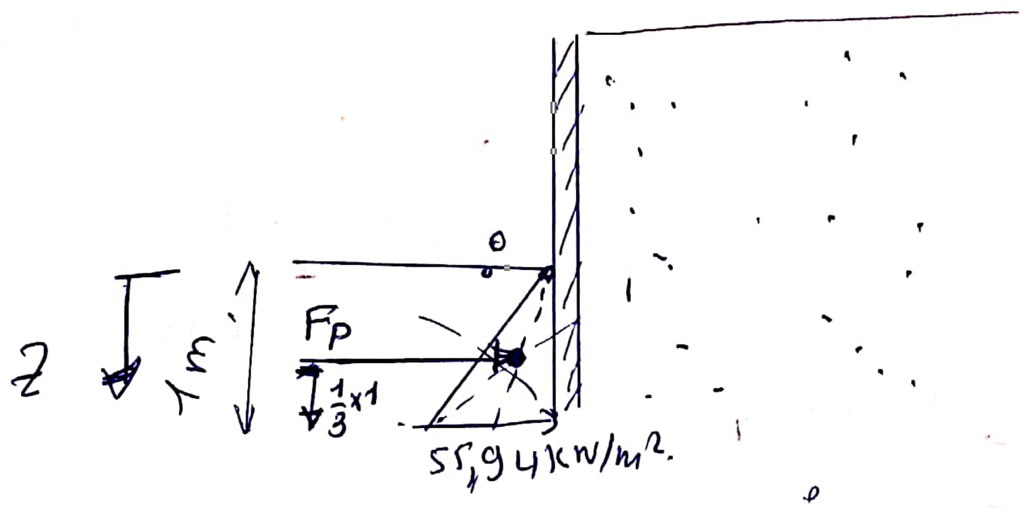
F_a = Force de poussée

$Z_a = \frac{1}{3} H = \frac{1}{3} \times 3 = 1m$.

Déterminons $F_a = \frac{15,12 \times 3}{2} = 22,68$ KN/ml

Cette force est appliquée au centre de gravité du triangle.

2- contrainte et force de butée



$$K_p = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \frac{1+\sin 33^\circ}{1-\sin 33} = 3,4 .$$

pour $0 \leq Z \leq 1m$

$\sigma_p = K_p . \sigma_1 = K_p . \gamma . Z$

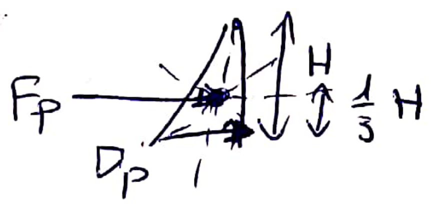
$Z = 0 \Rightarrow \sigma_p = 0$

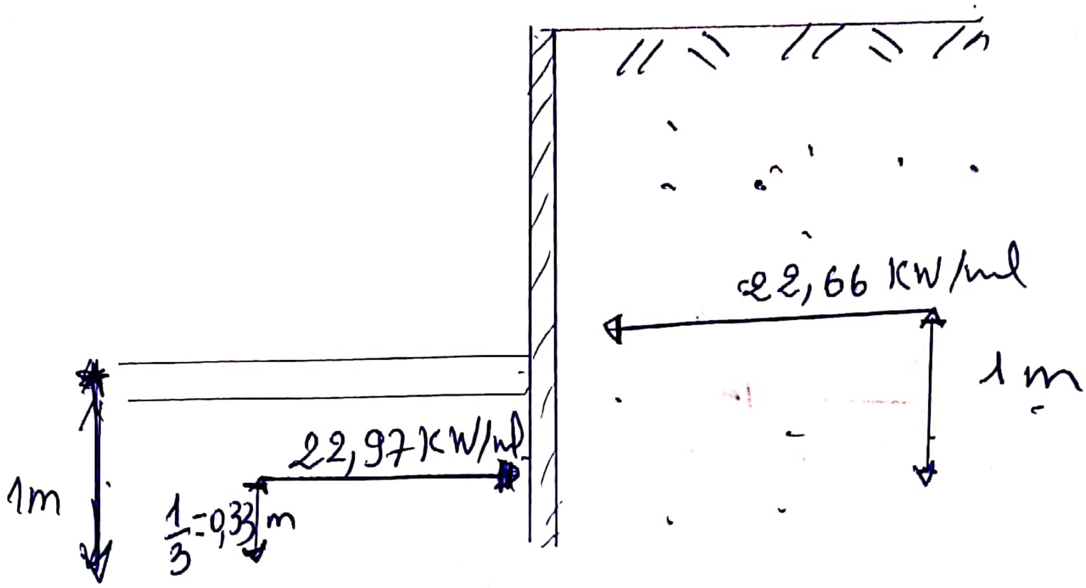
$Z = 1m \Rightarrow \sigma_p = K_p . \gamma . 1m$

$\sigma_p = 3,33 . 16,8 . 1m$
$= 55,94\ kN/m^2$

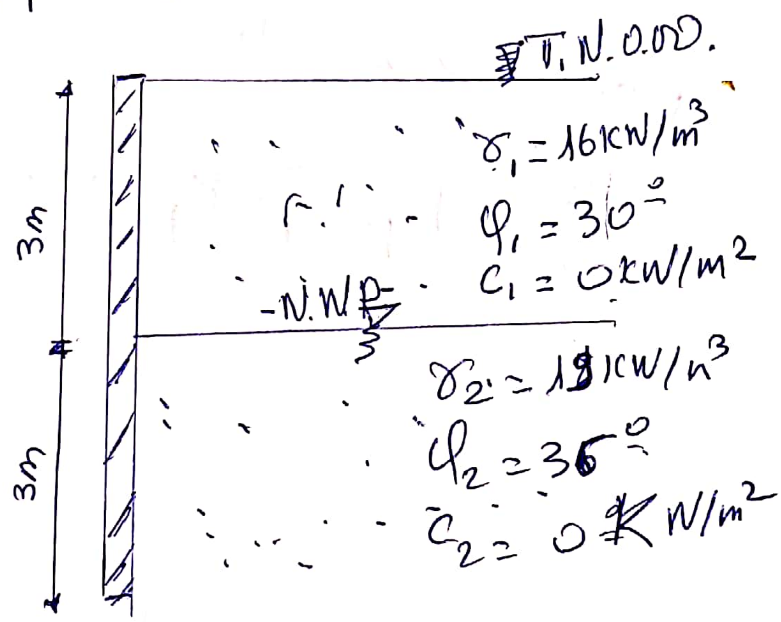
* Déterminer la force de poussée et son point d'application

$$F_p = \frac{55,94 \times 1}{2}$$
$$= 22,97\ kN$$





2ème exercice d'application:



Dans cet exercice, on va considérer deux couches de sol différentes mais du même type. (Sol frottant, $\varphi \neq 0$, $C = 0$).

On demande de déterminer la force de Rankine

Solution :

$0 \leq z \leq 3$. 1ère couche :

$$K_{a_1} = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) = 0{,}33$$

$$\sigma_a = K_a . \sigma_v = K_a . \gamma . Z$$

$z = 0 \Rightarrow \sigma_a = 0$

$z = 3 \Rightarrow \sigma_a = 0{,}33 . 16 . 3 = 15{,}84 \, kN/m^2$

pour $3 \leq z \leq 6$

$$K_{a_2} = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_2}{2}\right) = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{36}{2}\right) = 0{,}26$$

$$\sigma_a = K_{a_2} . \sigma_v$$

$$\sigma'_v = \gamma_1 h_1 + \gamma'_2 (z-3)$$

$$= \cancel{16.3 + 19(z-}$$

$$= 16.3 + (19-10)(z-3)$$

$$= 16.3 + 9(z-3) = 48 + 9(z-3)$$

$$\sigma'_v = K_{a_2} . [48 + 9(z-3)]$$

$z = 3 \Rightarrow \sigma_a = 0{,}26 . 48 = 12{,}4 \, kN/m^2$

$z = 6 \Rightarrow \sigma_a = 0{,}26 . 48 + 0{,}26 . 9 . 3 = 19{,}5 \, kN/m^2$

et on calcul par la suite la poussée due à la presence de la nappe d'eau.

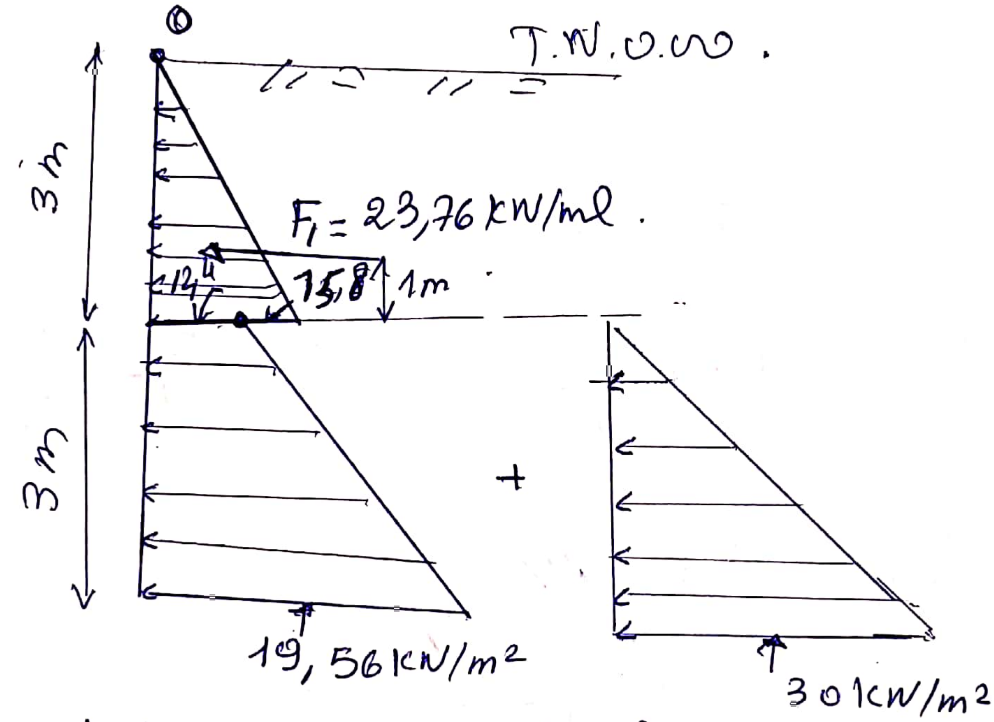
$3 \leq z \leq 6$

$U = \gamma_w . (z - 3)$

$z = 3 \Rightarrow U = 0$

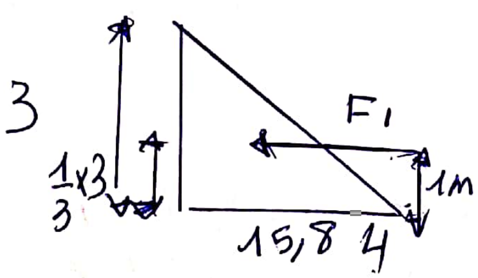
$z = 6 \Rightarrow U = 10 \times 3 = 30\ kN/m^2$

Ka de l'eau egale à 1



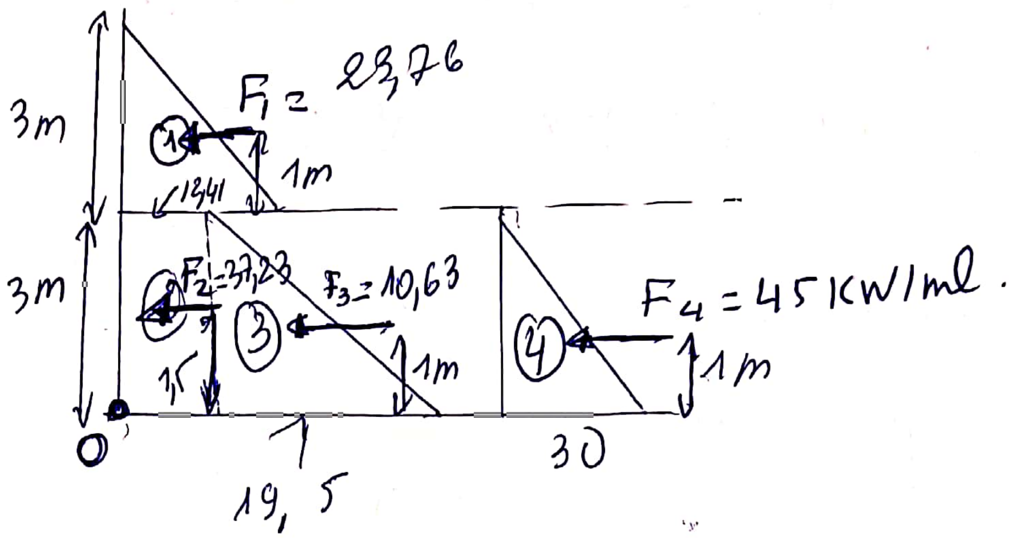
* <u>On va determiner toutes les forces</u> :

Pour La 1ère couche, la on a une répartition triangulaire la force resultante c'est La base x hauteur / 2



Donc $F_1 = \frac{15,84 \times 3}{2} = 23,76\ kN/ml$

qui s'applique au $\frac{1}{3}$ de sa hauteur



Pour la deuxième section (2).

La force est obtenue selon le rectangle.

$F_2 = 12,41 \times 3 = 37,23$ KN/m³

Son point d'application à partir de la base.

$\frac{3m}{2} = 1,5m$.

Pour la Section (3). qui est un triangle.

La force est $F_3 = (19,5 - 12,41) \frac{\times 3}{2}$

$= 10,63$ KN/ml.

Pour la Section ~~B~~ 4: section sans forme de nappe

$F_4 = \frac{30 \times 3}{2} = \frac{90}{2} = 45$ KN/ml.

• La Force Totale qui s'applique sur ce mur, est.

$F = \sum F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$F = 23{,}76 + 37{,}23 + 10{,}63 + 45$

$= 116{,}62 \ KN/ml$.

Donc, on a déterminé la force qui s'applique sur le mur, Reste à déterminer son point d'application la méthode la plus simple :

$$Z_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i . Z_i}{\sum F_i}$$

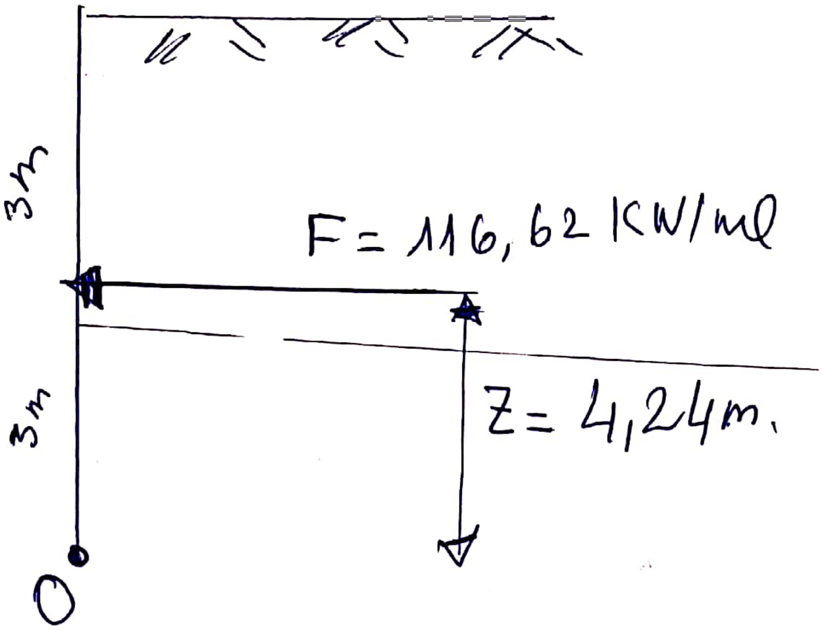
, Ce point sera déterminé à partir de la base du mur qui est 0.

$$Z_i = \frac{23{,}76.(1+3) + 37{,}23 \times 1{,}5 + 10{,}63 \times 1 + 45 \times 1}{116{,}62}$$

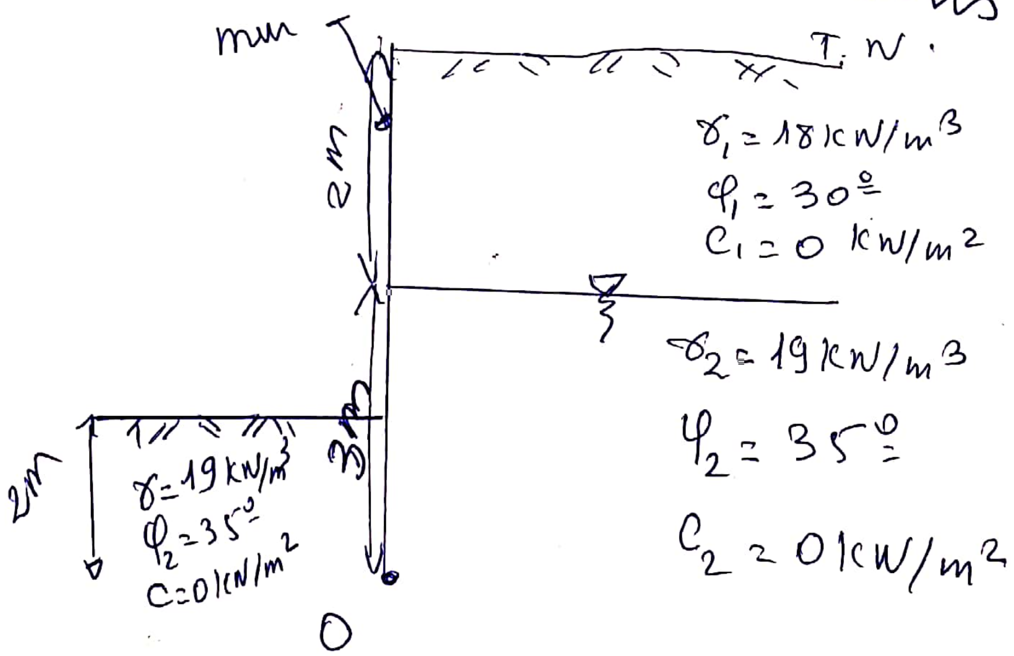
$Z_i = 4{,}24 \ m$.

Scanné avec CamScanner

et on aura :

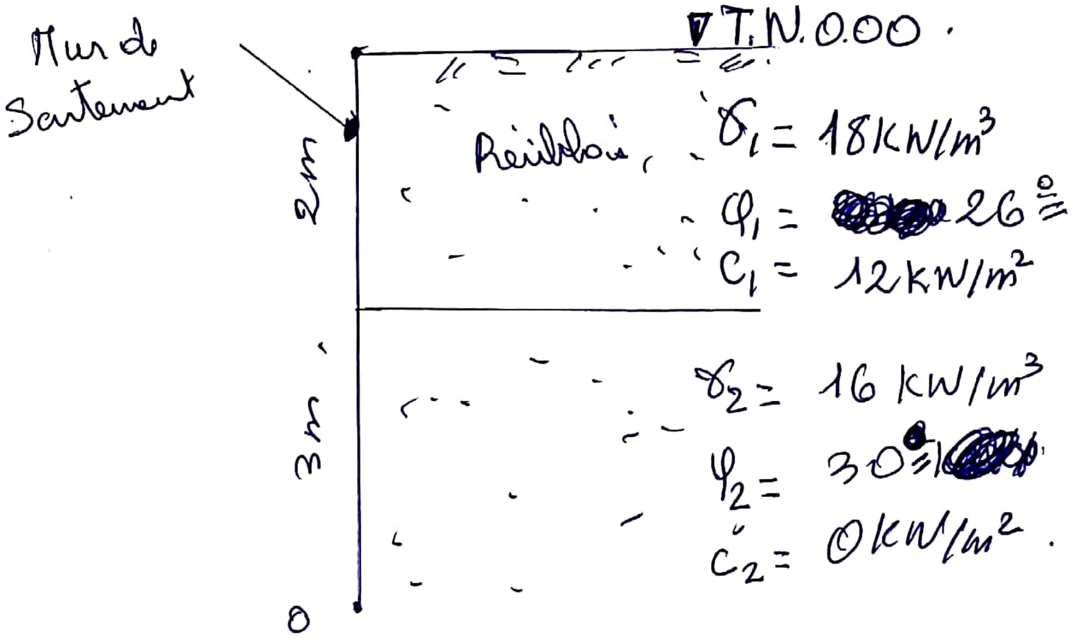


Exercice 3 : Soit à déterminer les forces de Rankine dans le cas ci-dessous.



Exercice d'application 4 :

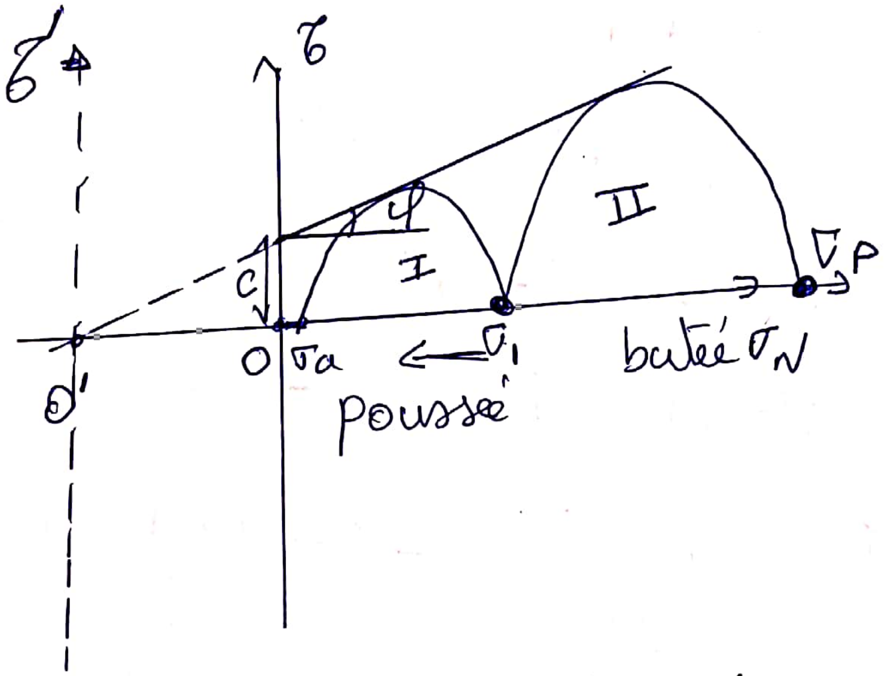
Soit à déterminer la force de Rankine dans le cas d'un sol frottant et cohérent ($C \neq 0$, $\varphi \neq 0$).



Déterminer la force de Rankine dans l'exemple ci-dessus.

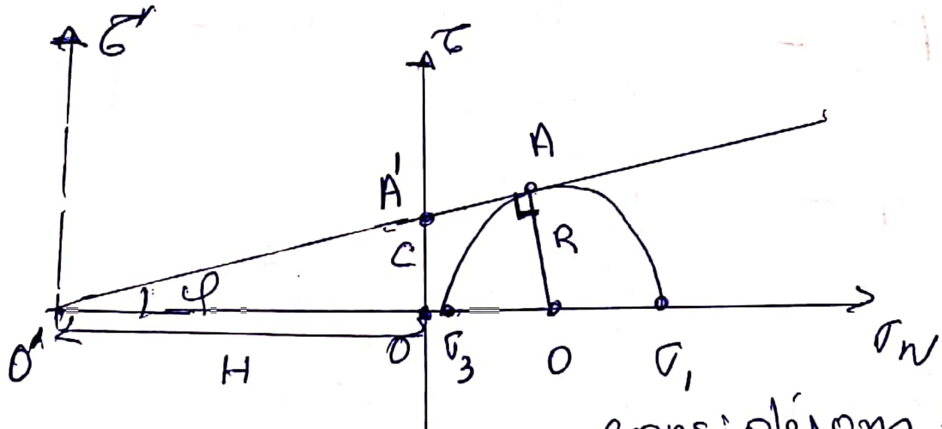
II * Pour les Sols coherents et frottant : (C, φ)

On utilise le theoreme des états correspondants comme dans le exemple qui suit



et on va deteminer de la même manière que le sol frottant ($\varphi \neq 0$, $C = 0$).

* cas de la poussée.



considérons le triangle OAO'

$$\sin\varphi = \frac{R}{H + \sigma_3 + R}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C}{H} \quad (\text{dans le triangle } OA'O')$$

$$\Rightarrow \boxed{H = C\cot g\,\varphi}$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}{H+\sigma_3+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2H+2\sigma_3+\sigma_1-\sigma_3} = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2H+\sigma_1+\sigma_3} \quad (1)$$

$$\sin\varphi = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2c\,\mathrm{cotg}\,\varphi+\sigma_1+\sigma_3}$$

$$\Rightarrow \sin\varphi(2c\,\mathrm{cotg}\,\varphi+\sigma_1+\sigma_3) = \sigma_1-\sigma_3$$

$$\Rightarrow \sin\varphi\cdot\sigma_3+\sigma_3 = \sigma_1-\sigma_1\sin\varphi-2c\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\varphi$$

$$\Rightarrow \sigma_3(1+\sin\varphi) = \sigma_1-\sigma_1\sin\varphi-2c\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = \sigma_1\frac{(1-\sin\varphi)}{1+\sin\varphi}-\frac{2c\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \quad (2)$$

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi.$$

avec $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$ (3),

remplaçons (3) dans (2), on aura.

$$\sigma_3 = \sigma_1 K_a - \frac{2c\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{1+\sin\varphi} = K_a.\sigma_1-\frac{2c\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{(1+\sin\varphi)^2}}$$

$$= K_a.\sigma_1-2c\sqrt{\frac{1-\sin^2\varphi}{(1+\sin\varphi)^2}}$$

$$= K_a\sigma_1-2c\sqrt{\frac{(1-\sin\varphi)\cancel{(1+\sin\varphi)}}{(1+\sin\varphi)^{\cancel{2}}}}$$

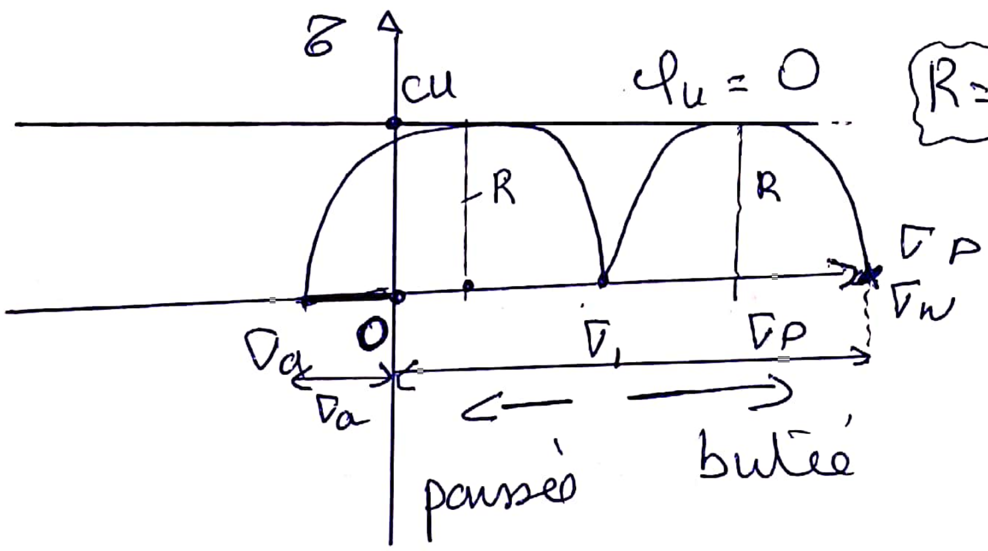
$$= K_a\sigma_1-2c\sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}} = K_a\sigma_1-2c\sqrt{K_a}.$$

$$\boxed{\sigma_a = K_a \sigma_1 - 2c\sqrt{K_a}}$$

pour la butée, on va procéder de la même manière, et on aura.

$$\boxed{\sigma_p = K_p \sigma_1 + 2c\sqrt{K_p}}$$

III, pour un Sol purement cohérents, $c_u \neq 0$, $\varphi_u = 0$
cas de l'argile saturée.



Cas de la poussée

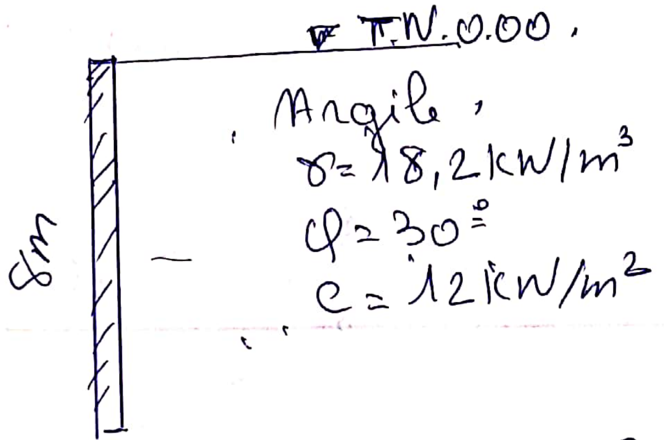
$$\sigma_a = 2c_u - \sigma_1$$

Cas de la butée

$$\sigma_p = \sigma_1 + 2c_u .$$

Exemple d'application n° 5 : (Sol frottant et cohérent)

Un mur de soutènement de 8m de hauteur, retient un sol argileux ayant un angle de frottement de 30° et une cohésion $C = 12\,kN/m^2$ et $\gamma = 18,2\,kN/m^3$.
Déterminer la force de Rankine par mètre de longueur et son point d'application.



Solution :

$$K_a = \tan^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) = \tan^2\left(45 - \frac{30}{2}\right) = 0,577$$

$$\sigma_a = K_a \sigma_a - 2c\sqrt{K_a}$$

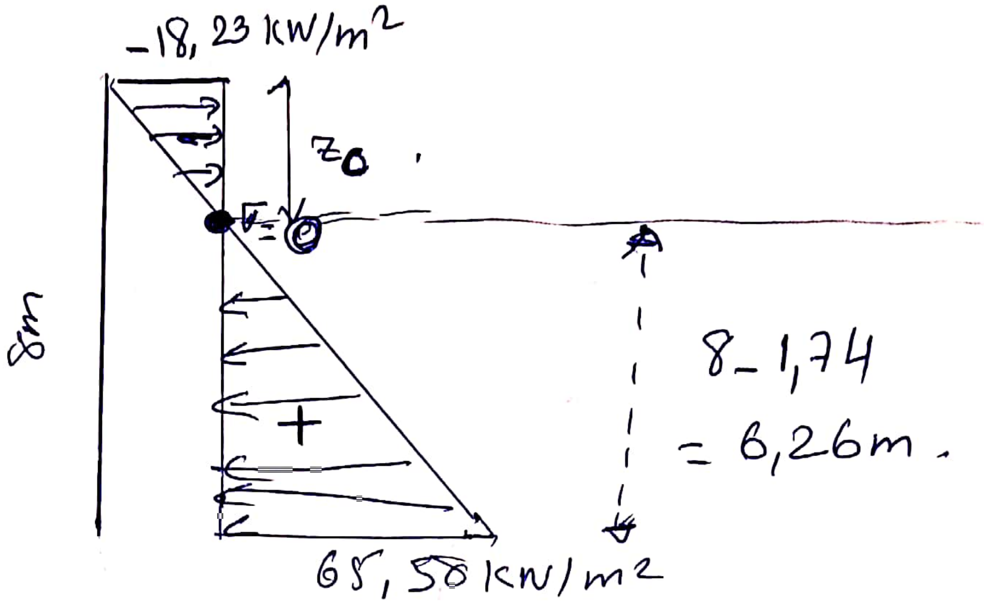
$0 \leq z \leq 8$

$$\sigma_a = K_a . \gamma z - 2c\sqrt{K_a}$$

$z = 0 \Rightarrow \sigma_a = -2c\sqrt{K_a}$
$= -2.12.\sqrt{0,577}$
$= -18,23\,kN/m^2$

$z = 8 \Rightarrow \sigma_a = K_a.\gamma.8 - 2.12.\sqrt{0,577}$

$\sigma_a = 0,577.18,2.8 - 2.12.\sqrt{0,577}$
$= +65,68\,kN/m^2$



$\sigma_a = K_a \sigma_v - 2c\sqrt{K_a}$.

Pour déterminer Z_c on met $\sigma_a = 0$

$K_a \sigma_v - 2c\sqrt{K_a} = 0 \Rightarrow K_a \sigma_v = 2c\sqrt{K_a}$.

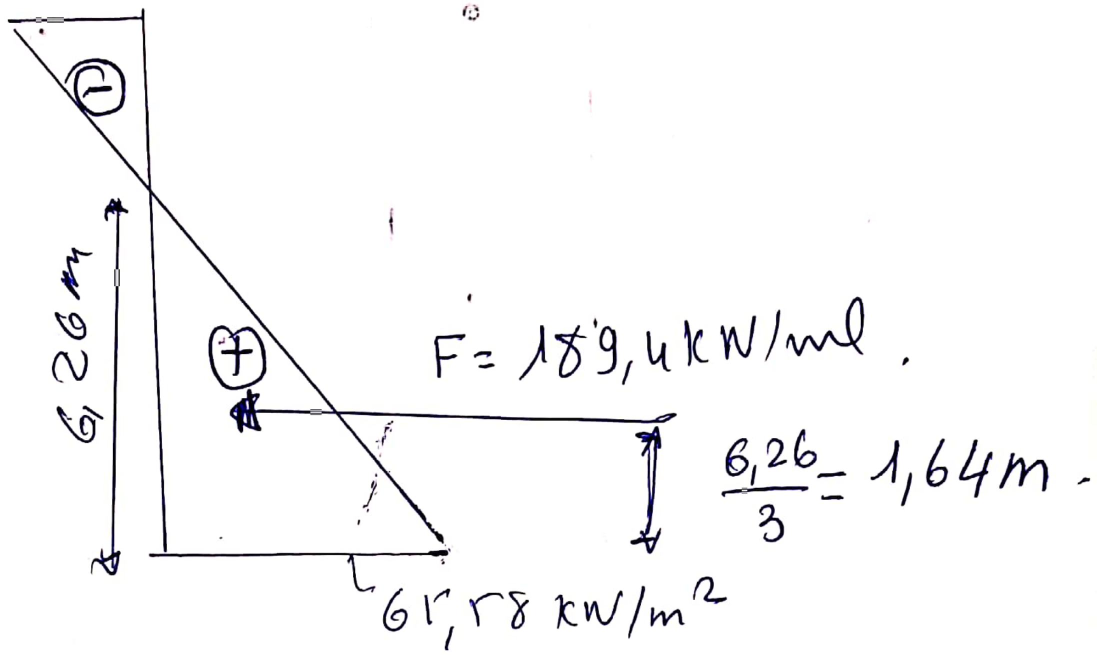
$K_a \cdot \gamma \cdot Z_c = 2c\sqrt{K_a}$.

$$\boxed{Z_c = \frac{2c\sqrt{K_a}}{\gamma \cdot K_a}}$$

$$Z_c = \frac{2 \cdot 12 \cdot \sqrt{0,577}}{18,2 \cdot 0,577}$$

$$\boxed{Z_c = 1,74\,m}$$

Dans la partie (-), on ne détermine pas la résultante, que dans la partie (+)



$$F = \frac{65,58 \times 6,26}{2}$$

$= 189,4$ kN/ml