# Chapitre 3

# Lois Usuelles

Dans ce chapitre, nous passons en revue certaines lois connues dans la pratique, discrètes ou continues, et nous explicitons certaines de leurs caractéristiques, telles que la moyenne et la variance..

## 3.1 Lois discrètes usuelles

### 3.1.1 Loi uniforme :

Une variable aléatoire $X$ suit une loi uniforme discrète si elle prend ses valeurs dans l'ensemble fini $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ avec la même probabilité c'est à dire : $p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{cardE} = \frac{1}{n}$. Dans ce cas, on dit que les événements $\{X = x_i\}$ sont équiprobables. On dit dans ce cas que $X$ suit une loi uniforme sur $E$ et on note par : $X \backsim \mathcal{U}_{\{x_1, x_2, ..., x_n\}}$. Donc

$* \ X(\Omega) = E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$* \ p_i = P(X = x_i) = \frac{1}{cardE} = \frac{1}{n}$

$* \ E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

$* \ E(X^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$

$* \ V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

**Cas particulier**

Si $x_i = i$ c à d $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$ alors : $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}$, $E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n^2-1}{12}$

### 3.1.2 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

**Définition 30.** *Une épreuve (expérience) de Bernoulli est une épreuve à deux issues, souvent appelées :* ***succès*** *et* ***échec*** *.*

On considère une expérience aléatoire et un événement $A$ lié à cette expérience tel que $P(A) = p$ . On effectue une fois cette expérience et on désigne par $X$ l'application qui prend la valeur 1 si $A$ se réalise et la valeur 0 sinon ($X$ est le nombre de réalisation de $A$) c'est à dire nous avons ici une épreuve de Bernoulli tel que le **succès** est la réalisation de $A$ et l'**échec** est la réalisation de $\overline{A}$.

$X$ est donc la variable aléatoire définie par :

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si } A \text{ est réalisé} \\ 0, & \text{si } A \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}$$

la loi de $X$ est donnée par : $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1-p = q$

On dit que $X$ suit une loi Bernoulli de paramètre $p$ et on note par : $X \backsim \mathcal{B}(p)$ (on utilise aussi la notation $X \backsim \mathcal{B}(1, p)$)

Dans ce cas :

$*\ E(X) = \sum_{i=0}^{1} iP(X = i) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = p$

$*\ E(X^2) = \sum_{i=0}^{1} i^2 P(X = i) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) = p$

$*\ V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

### 3.1.3 Loi Binômiale $\mathcal{B}(n,p)$

On considère une épreuve de Bernoulli qui nous donne $A$ ou $\overline{A}$. On effectue, dans les mêmes conditions, $n$ fois de suite cette épreuve avec :.

* La probabilité que $A$ se réalise est $p$ dans chaque épreuve.

*Les $n$ répétitions de l'épreuve sont indépendantes les unes des autres.

Soit $X$ le nombre d'obtention de l'évènement $A$ au cours de $n$ épreuves. Alors $X$ est la variable aléatoire qui prend les valeurs $0, 1, ..., n$ sa loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\} : P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

On dit que $X$ suit la loi Binomiale de paramètres $n$ et $p$ et on note : $X \backsim \mathcal{B}(n,p)$

Le premier paramètre de la loi $n$, est le nombre de répétitions de l'épreuve de Bernoulli ; le second paramètre $p$, est la probabilité que $A$ se réalise dans chaque épreuve.

Montrons que $\forall k \in \{0, 1, ..., n\} : P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ :

On a la probabilité que $A$ est réalisé $k$ fois exactement dans la suite des répétitions de l'épreuve, et $\overline{A}$ est réalisé $n-k$ fois est $p^k (1-p)^{n-k}$ puisque les répétitions sont indépendantes les unes des autres. Et comme il y a autant dans les $n$-uplets où $A$ apparaît exactement $k$ fois que de sous-ensembles à $k$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments, c à d $C_n^k$ donc on la formule.

**Remarks 3.1.1.** *1. On a :* $\sum\limits_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$ *(binôme de Newton), donc il s'agit vraiment d'une loi de probabilité*

*2. On remarque que* $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ *est* $(k+1)^{ième}$ *terme dans la formule de Newton de* $(p + (1-p))^n$ *et pour cela on l'appelle la loi Binomiale.*

*3. il est clair que* $X$ *peut être regardé comme la somme de* $n$ *variables indépendantes de Bernoulli* $X_i$ *de même paramètre* $p$*, soit :* $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_i$ *où :*

$$X_i = \begin{cases} 1, & \textit{si } A \textit{ est réalisé dans l'épreuve } i \\ 0, & \textit{si } A \textit{ n'est pas réalisé dans l'épreuve } i \end{cases}$$

**Proposition 3.1.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire tel que $X \backsim \mathcal{B}(n,p)$. Alors*
$* \; E(X) = np \qquad * \; V(X) = np(1-p)$

**Preuve.** La démonstration est basée toujours sur la formule de Newton. On a :
$* \; E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np(p+(1-p))^{n-1} = np$
$* \; E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$
$= np \sum_{k=2}^{n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} + np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$
$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np = n(n-1)p^2 + np.$
$* \; V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$ ■

**Remarque 3.1.1.** *On peut aussi utiliser que $X = \sum_{k=1}^{n} X_i$ avec $X_i \backsim \mathcal{B}(p)$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et donc on a :*
$* \; E(X) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_i\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_i) = \sum_{k=1}^{n} p = np$
** Comme les variables aléatoires $(X_i)_{i=1,2,...,n}$ sont indépendantes alors :*
$V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_i\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_i) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$

### 3.1.4 Loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, m)$

Soit une population de $N$ individus parmi lesquels $m$ $(m \leq N)$ individus possèdent un caractère particulier. Il s'agit par exemple du nombre d'individus qui souffrent d'une certaine maladie, ou le nombre des pièces défectueuse dans un grand lot de fabrication. On prélève un échantillon de $n$ $(n \leq N)$ individus parmi cette population (le tirage pouvant s'effectuer d'un seul coup ou au fur et à mesure mais sans remise). On note $X$ la variable aléatoire d'individus de l'échantillon possédant le caractère envisagé, alors $X$ prend les valeurs de l'ensemble $X(\Omega) = \{0, 1, ..., \min(n, m)\}$. Dans ce cas $X$ suit une loi dite **hypergéométrique** et on a :

$$\forall k \in X(\Omega) : \; P(X=k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$$

On note $X \backsim \mathcal{H}(N, n, m)$

Si on pose $p = \frac{m}{N}$ (la proportion des individus qui possèdent le caractère envisagé) on peut ici utiliser la notation : $X \backsim \mathcal{H}(N, n, p)$

Montrons que $\forall k \in X(\Omega) : P(X = k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$ :

On peut voir facilement que : $P(X = k) = \frac{Card\left(X^{-1}(\{k\})\right)}{Card(\Omega)}$ et on a : $Card(\Omega) = C_N^n$ (Car on fait des tirages sans remise de $n$ éléments parmi $N$ éléments), et $Card\left(X^{-1}(\{k\})\right) = C_m^k C_{N-m}^{n-k}$ = nombre de cas où l'échantillon de $n$ éléments contient $k$ qui possède le caractère et $n - k$ qui ne le possèdent pas.

**Proposition 3.1.2.** *Soit $X$ une variable aléatoire tel que $X \backsim \mathcal{H}(N, n, m)$ et $p = \frac{m}{N}$. Alors*

** $E(X) = np$ * $V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$*

**Preuve.** On a :

* $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{nm}{N}\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{m-1}^{k-1} C_{N-m}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = \frac{nm}{N} = np$ (Car $\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{m-1}^{k-1} C_{N-m}^{n-k}}{C_{N-1}^{n-1}} = 1$ c'est la somme des probabilités de la loi $\mathcal{H}(N-1, n-1, m-1)$)

De la même manière on peut calculer $E(X^2)$ et ainsi $V(X)$. ■

**Remarque 3.1.2.** ** On remarque que si on pose $p = \frac{m}{N}$, alors, $p$ est la probabilité de tomber sur un individu présentant le caractère envisagé lorsque l'on tire au hasard un individu dans la population. Avec cette notation, on a : $E(X) = np$. On retrouve, bien que la probabilité de tirer un individu présentant le caractère varie lors de la constitution de l'échantillon de taille $n$, le résultat de l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$.*

** On remarque aussi que la variance de $X$ ne diffère de la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ que d'un facteur $\frac{N-n}{N-1}$ qui s'appelle facteur d'exhaustivité.*

** Si dans la même population on fait les tirages des $n$ individus avec remise alors la variable aléatoire $X$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et pour cette raison on dit que la loi*

***binomiale*** *est un shéma de tirage avec remise et la loi* ***hypergéométrique*** *est le shéma de tirage sans remise.*

### 3.1.5 Approximation de la loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,m)$ par une loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$

En pratique si $N \geq 10n$ alors on peut faire l'approximation $\mathcal{H}(N,n,m) \rightarrow \mathcal{B}(n,\frac{m}{N})$

### 3.1.6 Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

C'est la loi du nombre d'essais (ou d'épreuves) nécessaires pour faire apparaître pour la première fois un événement de probabilité $p$. Alors, on considère une expérience aléatoire et soit $A$ un évènement lié à cette expérience avec $P(A) = p$. On effectue, dans les mêmes conditions, cette expérience plusieurs fois jusqu'à l'obtention de $A$ pour la première fois. Soit donc $X$ le nombre de fois nécessaires pour obtenir $A$ pour la première fois. Alors $X$ est la variable aléatoire qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (c'est à dire ici $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$), avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \; P(X = k) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1}p$$

et on dit que $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ et on note : $X \backsim \mathcal{G}(p)$

Soient les évènements $A_i$ :"$A$ est réalisé dans l'expérience $i$" pour $i \geq 1$ alors on a $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'évènements indépendants avec $P(A_i) = p$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire : $\forall k \in \mathbb{N}^* : P(X = k) = P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k\right) = P\left(\overline{A_1}\right) P\left(\overline{A_2}\right) ...P\left(\overline{A_{k-1}}\right) P(A_k) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1}p$

**Proposition 3.1.3.** *Soit $X$ une variable aléatoire tel que $X \backsim \mathcal{G}(p)$. Alors*

* $E(X) = \frac{1}{p}$ * $V(X) = \frac{q}{p^2}$

**Preuve.** On utilise dans la démonstration la somme de la série géométrique et ses dérivés

$* \ E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{dq^k}{dq} = p\frac{d\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k\right)}{dq} =$
$p\frac{d\left(\frac{1}{1-q}\right)}{dq} = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

$*E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 q^{k-1}p = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k^2 - k + k) q^{k-1}$
$= p\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} + p\sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + E(X)$
$= pq\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{d^2q^k}{dq^2} + \frac{1}{p} = pq\frac{d^2\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k\right)}{dq^2} + \frac{1}{p}$
$= pq\frac{d^2\left(\frac{1}{1-q}\right)}{dq^2} + \frac{1}{p} = pq\frac{d\left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)}{dq} + \frac{1}{p} = pq\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$

$* \ V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$ ■

**Exemple 3.1.1.** *On jette une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à l'obtention de pile. Soit $X$ le nombre de jets nécessaires. Alors ici $X \backsim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ c'est à dire $\left(q = p = \frac{1}{2}\right)$ :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \ P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

*et :* $* \ E(X) = 2 \ \ * \ V(X) = 2$

### 3.1.7 Loi Binomiale négative $\mathcal{NB}(n,p)$

La loi binomiale négative de paramètres $n$ et $p$ est la loi de la variable aléatoire $X$ donnant le nombre d'essais nécessaires indépendants pour obtenir $n$ succès Alors $.X(\Omega) = \{n, n+1......\}$ et on a pour tout $k \geq n$ :

$$P_k = P(X=k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

Montrons que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} P(X=k) = 1$.Posons $r = k-n$, donc $k = n+r$. La somme devient alors :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{n-1} p^n (1-p)^r = p^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{n-1} (1-p)^r$$

On utilise la série génératrice suivante (connue pour la loi binomiale négative) :

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{n-1}x^r=\frac{1}{(1-x)^n},\quad \text{pour } |x|<1$$

En posant $x=1-p$, on obtient :

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{n-1}(1-p)^r=\frac{1}{p^n}$$

Donc, la somme initiale devient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}P(X=k)=p^n\cdot\frac{1}{p^n}=1$$

**Proposition 3.1.4.** *Soit $X$ une variable aléatoire tel que $X\backsim\mathcal{NB}(n,p)$. Alors*

$*\ E(X)=\frac{n}{p}$ $\qquad *\ V(X)=n\frac{1-p}{p^2}$

### 3.1.8 Loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On dit que la variable aléatoire discrète $X$, à valeurs dans $X(\Omega)=\mathbb{N}$, suit la loi de Poisson de paramètre$\lambda$ , notée $X\backsim\mathcal{P}(\lambda)$, si sa loi est donnée par la relation suivante :

$$\forall k\in\mathbb{N}:\ P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

**Rappel :** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Alors on a : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$

La variable aléatoire de Poisson est utilisée pour modéliser les phénomènes comme, le nombre d'accident pendant un jour, nombre d'appel téléphoniques pendant un intervalle de temps, nombre de pièces défectueuses dans une livraison importante, nombre de clients qui arrivent à la poste .........

**Proposition 3.1.5.** *Soit $X$ une variable aléatoire tel que $X\backsim\mathcal{P}(\lambda)$. Alors*

$*\ E(X)=\lambda$ $\qquad *\ V(X)=\lambda$

**Preuve.** On a

$* \; E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda}e^{-\lambda} = \lambda.$

$*E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2P(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(k^2-k+k)\frac{\lambda^k}{k!}$

$= e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} + E(X)$

$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

$* \; V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ ■

### 3.1.9 Approximation de la loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X \backsim \mathcal{B}(n,p)$ alors on a le résultat suivant :

**Théorème 5.** $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ np\to\lambda}} \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{P}(\lambda)\,.$

*C'est à dire : quand : $n \to +\infty$ tel que $np \to \lambda$ alors $X \backsim \mathcal{P}(\lambda)\,.$*

***En pratique :*** *Ce théorème veut dire que si $n$ est suffisament* ***grand*** *(quand $n \geq 50$ et $p$ est suffisament* ***petit*** *$(p \leq 0.1)$)* ***où bien (****$n \geq 30$ tel que $np = \lambda < 5$) alors on peut faire l'approximation $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Et donc au lieu d'utiliser la loi binomiale on utilise la loi de poisson pour les calculs de $P(X=k)\,.$*

**Preuve.** Comme $X \backsim \mathcal{B}(n,p)$ alors $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ , pour $k = 0, 1, ..., n$ et donc on doit montrer que $\forall k \in \mathbb{N} : \lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ np\to\lambda}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Mais, comme $np \to \lambda$ on peut écrire : $p \simeq \frac{\lambda}{n}$ (quand $n \to +\infty$) et donc on a :

$\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ np\to\lambda}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1$

et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{(n-k)\left(-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)}$
$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)-k\left(-\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)}=e^{-\lambda}$ ■

**Exemple 3.1.2.** *Si par exemple* $X\backsim\mathcal{B}(100,0,03)$ *alors on peut utiliser l'approximation par la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *avec* $\lambda=100\times0,03=3$.

## 3.2 Lois absolument continues usuelles

### 3.2.1 Loi Uniforme Continue $\mathcal{U}_{[a,b]}$

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ vérifiant $a<b$. Soit $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de densité $f$. On dit que $X$ suit la loi uniforme sur $[a,b]$ et on écrit : $X\backsim\mathcal{U}_{[a,b]}$ si sa fonction de densité $f$ est donnée par la formule suivante :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & \text{si } x\in[a,b]\\ 0, & \text{si } x\notin[a,b]\end{cases}$$

Le fait que $f$ soit constante sur $[a,b]$ correspond au fait que selon cette loi on choisit les points dans l'intervalle $[a,b]$ avec les mêmes chances, ce qui explique le nom **uniforme.**

**La fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}_{[a,b]}$ est donnée par :**

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leq a\\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } x\in[a,b]\\ 1, & \text{si } x\geq b\end{cases}$$

En effet : $\forall x\in\mathbb{R}:F(x)=P(X\leq x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$

Si : $x\leq a:F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}0dt=0$

Si : $a\leq x\leq b:F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a}0dt+\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}$

Si : $x \geq b : F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int\limits_{b}^{x} 0dt = 1$

**Les caractéristiques de la loi $\mathcal{U}_{[a,b]}$**

$*\ E(X) = \frac{a+b}{2}$, $\quad *E(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$ $\quad *\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

En effet :

$*\ E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} x.0dx + \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx + \int\limits_{b}^{+\infty} x.0dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{b-a}$

$*\ E(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} x^2.0dx + \int\limits_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}dx + \int\limits_{b}^{+\infty} x^2.0dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

$*\ V(X) = E(X^2) - E(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

### 3.2.2 Loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$ et soit $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de densité $f$. On dit que $X$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ et on écrit : $X \backsim \mathcal{E}(\lambda)$ si sa fonction de densité $f$ est donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**La fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est donnée par :**

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

En effet : $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Si : $x \leq 0 : F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

Si : $0 \leq x : F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \lambda \exp(-\lambda t)\,dt = 1 - \exp(-\lambda x)$

**Les caractéristiques de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$**

$*\ E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\quad *E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ $\quad *\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

### 3.2.3 Loi Gamma $\gamma(\alpha, \lambda)$

Soit $\alpha$ et $\lambda$ deux réels strictement positifs. La loi gamma de paramètres $(\alpha, \lambda)$ est la loi de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La fonction $\Gamma$ étant définie pour $\alpha > 0$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Le paramètre $\alpha$ est le paramètre de forme et $\lambda$ le paramètre d'échelle..

**Proposition 3.2.1.** *1. Soit $T$ une variable aléatoire de loi gamma de paramètres $(\alpha, \lambda)$, alors :*

$E(T) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $\quad var(T) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$,

*2.• $\alpha = 1$ et $\lambda$ est la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda$.*

*• $\alpha = n$ et $\lambda$ est la **loi d'Erlang** d'ordre $n$ et de paramètre $\lambda$ (loi de la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda$),*

*• $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ est la **loi du** $\chi^2$ à $n$ degrés de liberté (loi de la somme des carrés de $n$ variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée de variance* 1).

### 3.2.4 Loi de Cauchy $Cau(\theta, x_0)$

La loi de Cauchy, appelée aussi loi de Lorentz, est une loi de probabilité classique qui doit son nom au mathématicien Augustin Louis Cauchy. Une variable aléatoire $X$ suit une loi de Cauchy si elle admet une densité $f$, dépendant des deux paramètres $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\theta > 0$ et définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\theta}{\theta^2 + (x - x_0)^2} = \frac{1}{\pi\theta} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - x_0}{\theta}\right)^2}$$

$x_0$ est le paramètre de location, $\theta$ est le paramètre d'échelle..

Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-x_0}{\theta}\right)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 1$

**La fonction de répartition de la loi** $Cau(\theta)$ **est donnée par :** $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-x_0}{\theta}\right) + \frac{1}{2}$$

**Espérance et écart type**

La loi de Cauchy n'admet ni espérance ni écart type. Et il en va de même pour tout moment d'ordre supérieur. En effet,

La fonction $xf(x) = \frac{\theta}{\pi}\frac{x}{\theta^2+(x-x_0)^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. donc $E(X)$ n'existe pas

De la même manière la fonction $x^2 f(x) = \frac{\theta}{\pi}\frac{x^2}{\theta^2+(x-x_0)^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. donc $E(X^2)$ n'existe pas et donc $V(X)$ n'existe pas.

### 3.2.5 Loi Normale (loi de Laplace-Gauss) $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$

La démonstration classique du résultat suivant utilise un calcul d'intégrale double. Ce résultat sera ici admis.

**Théorème 6.** *Soient $m \in \mathbb{R}$, et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Alors la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

*est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.*

*C'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$ (très clair),*
*et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1.$*

On remarque d'après le théorème que : $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sigma\sqrt{2\pi}$.

Et avec un changement de variable $\left(y = \frac{x-m}{\sigma^2}\right)$ dans l'intégrale on obtient aussi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$

**Définition 31.** ***(Loi normale** $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$) Soient $m \in \mathbb{R}$, et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que la variable aléatoire continue $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, lorsque la densité de probabilité de $X$ est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

**Proposition 3.2.2.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors :*
$*E(X) = m$ $\quad$ $*V(X) = \sigma^2$.

**Remarque 3.2.1.** *On remarque que les paramètres $m$ et $\sigma^2$ de la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ correspondent respectivement à l'espérance et à la variance de toute variable aléatoire suivant cette loi.*

**Définition 32.** ***(Loi normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$) On dit que la variable aléatoire continue $X$ suit la loi normale centrée réduite si $m = 0$ et $\sigma = 1$, c'est à dire $X \backsim \mathcal{N}(0,1)$, sa densité de probabilité $f$ est définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

*alors on a :* $*E(X) = 0$ $\quad$ $*V(X) = 1$

**Notation :** La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est notée $\Pi$ : . On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

nous n'avons pas une formule explicite pour la fonction de répartition de la loi normale mais ses valeurs sont données dans des tableaux numériques.

On remarque que : * $\forall t \in \mathbb{R} : \Pi(t) = 1 - \Pi(-t)$

* Si $X \backsim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \backsim \mathcal{N}(0,1)$, donc on peut toujours utiliser le tableau de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite pour calculer

les valeurs de celle de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et on a : si $F$ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors : $\forall t \in \mathbb{R} : F(t) = \Pi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$.

### 3.2.6 Approximation de la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ et la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi normale

**Approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi normale**

Soit la variable aléatoire $X$ qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et si $n$ tend vers l'infini, la variable $X$ tend vers la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = np$ et $\sigma^2 = np(1-p)$. C'est à dire en pratique, on fait l'approximation de la binomiale par une loi normale quand $n$ est suffisament grand $(n \geq 20)$ et $np(1-p) \geq 3$. Dans les calculs on utilise l'approximation $P(X = k) = P\left(k - \frac{1}{2} \leq Y \leq k + \frac{1}{2}\right)$.ou $Y \backsim N(np, np(1-p))$

**Approximation de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$**

Si $\lambda > 15$, la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être assimilée à une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = \lambda$ et $\sigma^2 = \lambda$.