



الحل النموذجي لامتحان الدورة العادية في مادة الرياضيات 2

التمرين الأول: (05 نقاط)

(1) المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى قابلة للفصل و منه

$$y' = xy \leftrightarrow \frac{dy}{y} = x dx \leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x dx \quad (0.5 \text{ ن})$$

$$\leftrightarrow \ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + c \leftrightarrow e^{\ln(y)} = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} \quad (0.5 \text{ ن})$$

$$\leftrightarrow y = ke^{\frac{1}{2}x^2}. \quad (0.5 \text{ ن})$$

(2) الحالة الأولى

$$a = 0$$

$$2y' = 3x,$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى قابلة للفصل و منه

$$2dy = 3x dx \leftrightarrow 2y = \frac{3}{2}x^2 + c \leftrightarrow y = \frac{3}{4}x^2 + k \quad (0.5 \text{ ن})$$

الحالة الثانية

$$a = 0$$

المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة شكلها العام

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

$$y_G = y_h + y_p \quad \text{و منه فحلها العام هو :} \quad (0.5 \text{ ن})$$

حساب الحل المتجانس

المعادلة المتجانسة المرافقة هي

$$y'' + 2y' = 0 \quad (0.5 \text{ ن})$$

المعادلة المميزة له هي

$$r^2 + 2r = 0 \quad (0.5 \text{ ن})$$

حيث المميز لا يساوي الصفر فان المعادلة تقبل حلين مختلفين و منه فان

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-2x} \quad (0.5 \text{ ن})$$

حساب الحل الخاص

بما ان الطرف الثاني للمعادلة التفاضلية عبارة عن كثير حدود من الدرجة الأولى و المعامل c يساوي 0 فان الحل الخاص عبارة عن كثير حدود من الدرجة الثانية شكله العام هو

(0.5 ن). $y_p = a_1x^2 + a_2x + a_3 \rightarrow y_p' = 2a_1x + a_2 \rightarrow y_p'' = 2a_1$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$2a_1 + 4a_1x + 2a_2 = 3x$$

بالمطابقة نجد

$$a_1 = \frac{3}{4} \text{ و } a_2 = -\frac{3}{4} \rightarrow y_p = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}a_2x + a_3$$

و في الاخير نجد ان

(0.5 ن). $y_G = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}a_2x + a_3.$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

لتكن f, g دالتين ذات متغيرين حقيقيين معرفتان ب

$$(x, y) = 3x^3y^2 + x^2y + 3x, \quad g(x, y) = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 2}$$

(1) احسب مايلي :

(0.5 ن). $f(1, -2) = 13$

(0.5 ن). الدالة غير معرفة عند هذه النقطة $g(0,0) = \frac{1}{0}$

(2)

• بما ان الدالة f عبارة عن متعدد حدود فان

(0.5 ن). $Df = \mathbb{R}^2$

(0.25 ن). $Dg = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2 \neq 0\}$ •
 $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (x-1)^2 + (y-1)^2 \neq 2\}$

فان ميدان تعريف الدالة g هي جميع نقاط المستوي ماعدا نقاط الدائرة ذات المعادلة

(0.25 ن). $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ حيث مركزها $(1,1)$ هو و نصف قطرها هو 2

(3)

(0.25 ن). $f'_x = 9x^2y^2 + 2xy + 3$ •

(0.25 ن). $f'_y = 6x^3y + x^2$ •

(0.25 ن). $g'_x = \frac{2(x-1)}{((x-1)^2 + (y-1)^2 - 2)^2}$ •

(0.25 ن). $g'_y = \frac{2(y-1)}{((x-1)^2 + (y-1)^2 - 2)^2}$ •

(4)

(0.25 ن). $f''_{xx} = 18xy^2 + 2y$ •

(0.25 ن). $f''_{xy} = 18x^2y + 2x$ •

- $f''_{yy} = 6x^3$ (ن 0.25)
- $f''_{yx} = 18x^2y + 2x$ (ن 0.25)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) احسب: $A^t, B^t, A + B, A - 2B, tr(A), \det(A)$.

- $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ (ن 0.5)
- $B^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (ن 0.5)
- $A + B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (ن 0.5)
- $A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ن 0.5)
- $Tr(A) = 0 + 0 = 0$ (ن 0.5)
- $\det(A) = 0 - 9 = -9$ (ن 0.5)

(2) لدينا

$$\det(B) = 2 \neq 0$$

و منه فإن B قابلة للعكس حيث

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \tilde{B}^t, \quad \tilde{B} = (-1)^{i+j} \det B_{ij} \quad (\text{ن 0.5})$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) احسب:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (\text{ن 0.5})$$

$$rI_2 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad (\text{ن 0.25})$$

$$A^2 + rI_2 = \begin{pmatrix} 9+r & 0 \\ 0 & 9+r \end{pmatrix} \quad (\text{ن 0.25})$$

(2) لدينا

$$A^2 + rI_2 = \begin{pmatrix} 9+r & 0 \\ 0 & 9+r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r = -9 \quad (\text{ن 0.25})$$

$$(0.25 \text{ ن}). \dots\dots\dots A^2 + rI = 0_M \leftrightarrow A \frac{1}{r} A = I_2$$

ومنه فان المصفوفة قابلة للقلب حيث

$$A^{-1} = \frac{1}{r} A$$

التمرين الرابع : (06 نقاط)

يختار الطالب طريقتين من بين ثلاث الطرق كل طريقة على 2.5 ن

(1) الشكل المصفوفي هو $AX = B$ حيث

$$(01 \text{ ن}). \dots A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

• طريقة كرامر:

لدينا $n = m = 3$ و

$$(1 \text{ ن}). \dots\dots\dots \det(A) = 14 \neq 0$$

و منه الجملة قابلة للحل بطريقة كرامر

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-1}{2}; \dots\dots\dots (0.5 \text{ ن}).$$

$$y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = 1 \dots\dots\dots (0.5 \text{ ن}).$$

$$z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -1; \dots\dots\dots (0.5 \text{ ن}).$$

• طريقة المقلوب: $\dots\dots\dots X = A^{-1}B$ (0.5 ن)

حساب A^{-1}

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^t, \tilde{A} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \tilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

و منه

$$(0.5 \text{ ن}). \dots\dots\dots \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• طريقة غوص: الشكل المصفوفي الموسع هو

$$(01 \text{ ن}) \dots\dots\dots \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

العملية الاولى هي كالاتي

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array} \right) \quad (\text{السطر الثاني-2السطر الثالث و نكتب في السطر الثالث})$$

و منه حل الجملة مكافئ لحل الجملة

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y - z = 3 \\ -7z = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$(0.5 \text{ ن}) \dots\dots\dots x = -\frac{1}{2}, y = 1, z = -1$$