حل السلسلة الاولى:

التمرين الأول:

$Q=3K^{1/4}L^{1/4}$

حيثُ Kهو رأس المال، و Lهو العمل، و rهو سعر رأس المال (سعر الفائدة) و wهو أجر العمل. يُراد عند مستوى إنتاج معين Q0تقليل التكلفة الكلية تحت قيد التكلفة المحددة

$C=rK+wL.C = rK + wL.$

الخطوة 1: صياغة مشكلة تقليل التكلفة باستخدام المضاعف اللاغرانج

نُكوِّن دالة لاغرانج بالشكل

$L(K,L,\lambda)=rK+wL+\lambda(Q_0-3K^{1/4}L^{1/4})$

الخطوة 2: اشتقاق الشروط الأولى(FOC)

بالنسبة لـ:K

$$\frac{\partial L}{\partial L} = w - \lambda * 3 * \frac{1}{4} K^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{3}{4}} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

بالنسبة لـ:L

$$\frac{\partial L}{\partial K} = w - \lambda * 3 * 1/4\, L^{1/4} K^{-3/4} = 0 \text{.....(2)}$$

:(قيد الإنتاج) λ\lambdaبالنسبة لـ

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Q_0 - 3K^{1/4}L^{1/4} = 0 \text{.....(3)}$$

الخطوة 3: إيجاد العلاقة بين Kو L

نقسم (1) على (2) للتخلص من :λ\lambda

$$\frac{r}{w} = \frac{3\lambda\frac{1}{4}\, K^{-3/4}L^{1/4}}{3\lambda\frac{1}{4}\, K^{1/4}L^{-3/4}} = \frac{K}{L}$$

إذًا:

$$r/w = L/K \Longrightarrow L = \frac{r}{w}\, K$$

الخطوة 4: تعويض العلاقة في قيد الإنتاج

نعوّض K في: L=r/wK (3)

$$3L^{1/4}(r/wL)^{1/4} = Q_0$$

نلاحظ أن

$$3\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2}(L)^{1/2} = Q_0$$

فتصبح المعادلة

$$L = \frac{1}{9}\left(\frac{r}{w}\right)^{1/2} Q_0^2$$

نحل بالنسبة لـK

$$K = \frac{1}{9}\left(\frac{w}{r}\right)^{1/2} Q_0^2$$

الخطوة 5: حساب TC

باستخدام العلاقة

C =wL* +rK* =

$$TC = w\left(\frac{1}{9}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} Q_0^2\right) + r\left(\frac{1}{9}\left(\frac{w}{wr}\right)^{\frac{1}{2}} Q_0^2\right) = \frac{2}{9}(wr)^{\frac{1}{2}} Q_0^2$$

حساب دوال التكلفة المتوسطة و الحدية

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{2}{9}(wr)^{\frac{1}{2}} Q_0$$

$$MC = \frac{\delta TC}{\delta Q} = \frac{4}{9}(wr)^{\frac{1}{2}} Q_0$$

حل التمرين الثاني: $Q=2\ K^{1/2}L^{1/2}$ بنفس طريقة حل التمرين الاول

$$L^* = \frac{Q}{2}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{4}$$ بتعويض الأسعار

$$K^* = \frac{Q}{2}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} = Q$$ بتعويض الأسعار

تحديد دالة التكلفة الكلية و المتوسطة و الحدية:

$$TC = \frac{Q^2}{2}(rw)^{1/2} + \frac{Q^2}{2}(rw)^{1/2} = Q^2(rw)^{1/2} = 4Q$$

AC= 4
MC=4

<u>حل التمرين الثالث:</u>

بتعويض قيمة $K=16$ في دالة الإنتاج نجد:

$Q=2L^{1/4}$ ➔ $L=Q^4/16$

تحديد دالة التكلفة الكلية و المتوسطة و الحدية:

$TC=16r+w(Q^4/16)=80+5(Q^4/8)$
$AC=(80/Q)+5(Q^3/16)$
$MC=5Q^3/2$

<u>حل التمرين الرابع:</u>

K=14

$Q=2L^{1/4}$

$L=1/16\ Q^4$

$CF=rK=5*16=80$

$CV=wL=10*(1/16\ Q^4)$

$TC=FC+VC=80+5/8Q^4$

$AC=TC/Q=80/Q+5/8Q^3$

$MC=5/2Q^3$

حل التمرين الخامس:

سنفترض أن دالة التكلفة المعطاة للمنتج هي

$$Ct(Q)=Q^3-6Q^2+15Q+2.$$

1. التكلفة الثابتة (Fixed Cost)

التكلفة الثابتة تُعبّر عن الجزء الذي لا يعتمد على Q أي عندما تكون Q=0
نحسب:

$$FC=Ct(0)=(0)3-6(0)2+15(0)+2=2$$

2. متوسط التكلفة الثابتة (Average Fixed Cost)

$$AFC(Q)=FC/Q=2/Q.$$

3. التكلفة المتغيرة (Variable Cost)

التكلفة المتغيرة هي باقي تكلفة الإنتاج بعد طرح التكلفة الثابتة:

$$VC(Q)=Ct(Q)-FC=(Q^3-6Q^2+15Q+2)-2=Q^3-6Q^2+15Q.$$

$$VC(Q)=Q^3-6Q^2+15Q.$$

4. متوسط التكلفة المتغيرة (Average Variable Cost)

يُحسب متوسط التكلفة المتغيرة بقسمة التكلفة المتغيرة على Q:

$$AVC(Q)=VC(Q)/Q=(Q^3-6Q^2+15Q)/Q=Q^2-6Q+15.$$

$$AVC(Q)=Q^2-6Q+15.$$

5.متوسط التكلفة الكلية(Average Total Cost)

متوسط التكلفة الكلية هو التكلفة الكلية مقسومة على Q:

$$ATC(Q)=Ct(Q)/Q=(Q^3-6Q^2+15Q+2)/Q=Q^2-6Q+15+2/Q.$$

$$ATC(Q)=Q^2-6Q+15+2/Q.$$

6.التكلفة الحدية(Marginal Cost)

التكلفة الحدية هي المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية بالنسبة للكمية Q:

$$MC(Q)=dCt(Q)/dQ= d(Q^3-6Q^2+15Q+2)/dQ.$$

إذًا:

$$MC(Q)=3Q^2-12Q+15.$$

7.التمثيل البياني لمنحنيات التكلفة

يمكن رسم المنحنيات التالية على نفس الرسم البياني مع وضع Qعلى المحور الأفقي (س) والتكلفة على المحور الرأسي (ص):

- **منحنى التكلفة الكلية:(TC)**

دالة التكلفة الكلية $Ct(Q)=Q^3-6Q^2+15Q+2$تبدأ عند Q=0عند قيمة 2(وهذه هي التكلفة الثابتة) وتزداد مع Qبحيث يظهر تأثير الحد Q^3في الزيادة.

- **منحنى متوسط التكلفة الثابتة:(AFC)**

وهو . $AFC(Q)=2Q$

يبدأ عند قيم عالية عندما تكون Qصغيرة (يميل إلى اللانهاية مع اقتراب Qمن الصفر) ويتناقص بشكل دائم مع زيادة Q.

- **منحنى متوسط التكلفة المتغيرة:(AVC)**

دالته . $AVC(Q)=Q^2-6Q+15$

هذا منحنى تربيعي على شكل U (منحنى منخفض في وسط المجال)؛ لحساب نقطة أدنى المنحنى يمكننا اشتقاقه:

$d\,(Q^2-6Q+15)/\,dQ=2Q-6.$

بالتساوي مع الصفر.$2Q-6=0 \longrightarrow Q=3Q=3$:

عند :$Q=3$

$AVCmin(3) = 9 - 18 +15 = 6.$

إذًا أقل متوسط تكلفة متغيرة هو 6 عند .$Q=3$

- **منحنى متوسط التكلفة الكلية:(ATC)**

دالته $ATC(Q)=Q^2-6Q+15+2/Q$

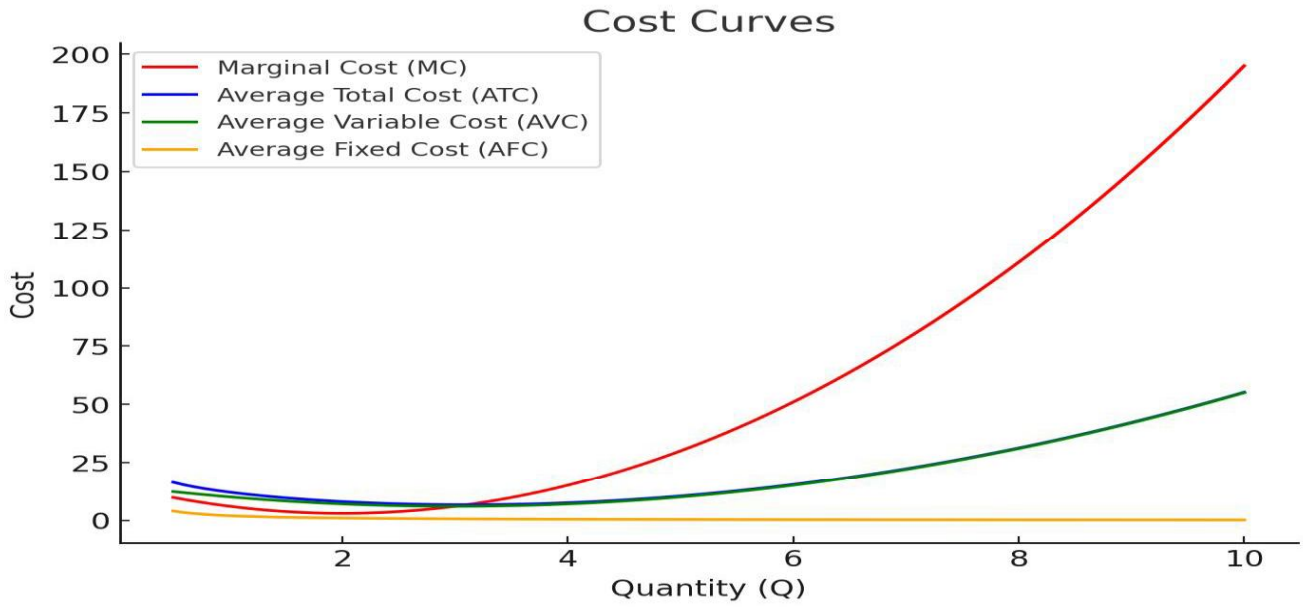
يكون منحنى U أيضًا؛ ويكون أعلى قليلاً من منحنى AVC بسبب إضافة $2/Q$وهي تكلفة ثابتة موزعة على الكمية عند Qكبير تقل مساهمة $2/Q$ويقترب ATC من.AVC

ATCmin ➔ **Q=3.10** ➔ATCmin=6.66

- **منحنى التكلفة الحدية:(MC)**

دالته $MC(Q)=3Q^2-12Q+15$وهي دالة تربيعية تصعد (منحنى مفتوح لأعلى).

ينخفض أولاً ثم يرتفع، ويقطع منحنيات التكلفة المتوسطة ATC) و (AVCعند نقاط معينة؛ وفقاً للنظرية الاقتصادية، يمر منحنى التكلفة الحدية عند أدنى نقطة لمنحنى التكلفة المتوسطة.



<u>حل التمرين السادس:</u>

سنفترض أن دالة التكلفة للمنتج معطاة كما يلي:

$$Ct(Q)=3Q^2+2Q+1$$

1. حساب التكلفة الثابتة (Fixed Cost, FC)

التكلفة الثابتة هي الجزء الذي لا يعتمد على الكمية Q أي عندما يكون Q=0:

$$FC=Ct(0)=3*0^2+2*0+1=1.$$

2. حساب متوسط التكلفة الثابتة (Average Fixed Cost, AFC)

يُحسب متوسط التكلفة الثابتة عن طريق قسمة التكلفة الثابتة على Q:

$$AFC(Q)=FC(Q)=1/Q.$$

3. حساب التكلفة المتغيرة (Variable Cost, VC)

التكلفة المتغيرة هي باقي تكلفة الإنتاج بعد استبعاد التكلفة الثابتة، أي:

$$VC(Q)=Ct(Q)-FC=(3Q^2+2Q+1)-1=3Q^2+2Q.$$

4. حساب متوسط التكلفة المتغيرة (Average Variable Cost, AVC)

متوسط التكلفة المتغيرة يُحسب بقسمة التكلفة المتغيرة على QQ:

$$AVC(Q)=VC(Q)Q=(3Q^2+2Q)/Q=3Q+2.$$

$$AVC(Q)=3Q+2.$$

5. حساب متوسط التكلفة الكلية (Average Total Cost, ATC)

متوسط التكلفة الكلية هو دالة التكلفة الكلية مقسومة على QQ:

$$ATC(Q)=Ct(Q)/Q=(3Q^2+2Q+1)/Q=3Q+2+1/Q$$

$$ATC(Q)=3Q+2+1/Q.$$

6. حساب التكلفة الحدية (Marginal Cost, MC)

التكلفة الحدية هي مشتقة دالة التكلفة الكلية بالنسبة للكمية Q:

$$MC(Q)=dCt(Q)/dQ=d\ (3Q^2+2Q+1)\ /dQ.$$

إذًا:

$$MC(Q)=6Q+2.$$

7.تحديد كمية الإنتاج التي تجعل التكلفة المتوسطة (أي متوسط التكلفة الكلية) أقل ما يمكن

لدينا دالة متوسط التكلفة الكلية:

$$ATC(Q)=3Q+2+1/Q$$

ولإيجاد الحد الأدنى لها، نحسب المشتقة الأولى بالنسبة لـ Qونساويها صفرًا.

أولاً، نحسب المشتقة:

$$d(ATC)/dQ=d\ (3Q+2+1/Q)\ /dQ=3-1/Q^2.$$

نجعل المشتقة تساوي صفرًا:

$$3-1/Q^2=0\Longrightarrow 1/Q^2=3\Longrightarrow Q^2=1/3$$

ونظراً لأن :Q>0

$$Q*=\sqrt{1/3}$$

ملاحظة :عند هذه الكمية، تكون دالة التكلفة المتوسطة في أدناها، كما يجب أن تتقاطع مع دالة التكلفة الحدية عند نقطة الحد الأدنى لمتوسط التكلفة الكلية .

<u>حل التمرين السابع:</u>

سنقوم بحل التمرين خطوة بخطوة، حيث دالة التكلفة المعطاة هي

$$Ct(Q)=2/3Q^3-5Q^2+18Q$$

1.هل تتعلق الدالة بالمدى القصير أم الطويل؟

لاحظ أن دالة التكلفة لا تحتوي على حد ثابت (لا يوجد مصطلح مستقل عن Q؛ إذ عند Q=0نحصل على

$$Ct(0)=2/3(0)3-5(0)2+18\cdot0=0$$

هذا يعني أنه لا توجد تكاليف ثابتة، وكافة التكاليف متغيرة. وفي المدى القصير عادةً يوجد على الأقل تكلفة ثابتة (تكلفة الرأس المال أو إيجار المصنع مثلاً). لذا فإن دالة التكلفة المعطاة تُعبّر عن **تكاليف المدى الطويل** حيث تكون جميع التكاليف متغيرة.

الدالة تتعلق بالمدى الطويل .

.2حدد دالة التكلفة الحدية

التكلفة الحدية (MC) هي مشتقة دالة التكلفة الإجمالية بالنسبة للكمية :QQ

$$MC(Q)=dCt(Q)/dQ=d\ (23Q^3-5Q^2+18Q)\ /dQ.$$

إذًا

$$MC(Q)=2Q^2-10Q+18.$$

.3حدد كمية الإنتاج الموافقة لأدنى تكلفة حدية

لإيجاد أدنى قيمة لدالة التكلفة الحدية، نوجد قيمة Qالتي تُقلل .MC(Q)

$$MCmin=dTC/dQ=0 \rightarrow 4Q-10=0$$

Q=2.5وحدة

MCmin=5.5

.4حدد دالة متوسط التكلفة الكلية

متوسط التكلفة الكلية (ATC) يُحسب بقسمة التكلفة الإجمالية على الكمية :Q

$$ATC(Q)=Ct(Q)/Q=(2/3Q^3-5Q^2+18Q)/Q.$$

$$ATC(Q)=2/3Q^2-5Q+18.$$

.5حدد كمية الإنتاج الموافقة لأدنى متوسط تكلفة كلية

لإيجاد أدنى نقطة لدالة ATC(Q)نوجد مشتقتها بالنسبة لـ Qونساويها للصفر. نبدأ بحساب مشتقة :ATC(Q)

ATCmin $\Longrightarrow$ d(ATC)/dQ==0 ➔ 4/3Q−5=0.

Q=3.75وحدة

ATCmin=8.625

.6رسم منحنيات التكلفة الحدية والمتوسطة

يمكن وصف شكل المنحنيات كما يلي:

- **منحنى التكلفة الحدية:(MC)**

معادلته

$$MC(Q)=2Q^2-10Q+18$$

هي دالة تربيعية على شكل منحنى.U

عند .MC(0)=18 ➔Q=0

يصل أدنى قيمة عند Q=2.5، حيث

$$MC(2.5)=2(2.5)^2-10(2.5)+18=2(6.25)-25+18=5.5$$

منحنى متوسط التكلفة الكلية:(ATC)

$$ATC(Q)=23Q^2-5Q+18$$

هي أيضاً دالة تربيعية) منحنى.(U

عند ATC(0)=18 ➔ Q=0

يصل أدنى قيمة عند Q=3.75، حيث $ATC(3.75)=23(3.75)^2-5(3.75)+18$

MC(3.75)=28.125−37.5+18=8.625.

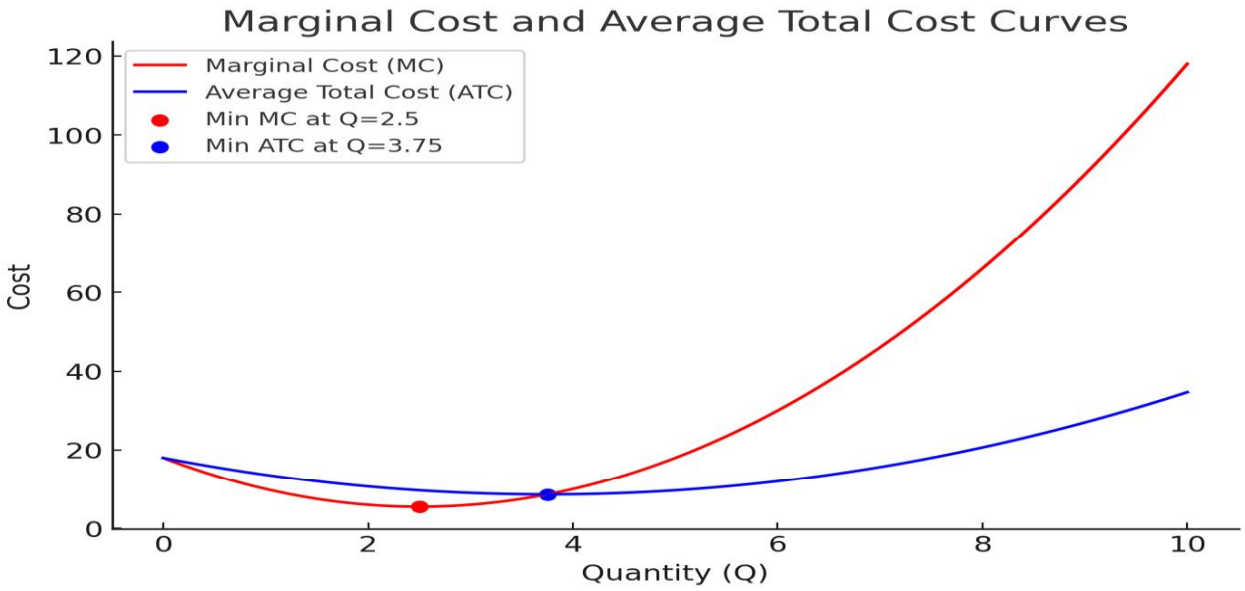
- **العلاقة بين المنحنيين:**

عادةً يقطع منحنى التكلفة الحدية (MC) منحنى متوسط التكلفة (ATC) عند أدنى نقطة للـ .ATC وفي حالتنا:

  - MCينخفض إلى أدنى 5.5عند Q=2.5ثم يرتفع.

عند Q=3.75يكون MC(3.75)= 8.625

يتلاقى منحنى MCمع منحنى ATCعند Q=3.75حيث تكون قيمة التكلفة 8.625، وهو أدنى مستوى لـATC



التمرين الثامن

حساب الإيرادات:

- الإيراد الكلي TR=P×Q :
- الإيراد المتوسط AR=TR/Q, :
- الإيراد الحدي MR=TRn−TRn−1 :

إكمال الجدول:

الكمية(Q)	السعر(P)	الإيراد الكلي(TR)	الإيراد المتوسط(AR)	الإيراد الحدي(MR)
0	50	0	-	-
1	45	45	45	45
2	40	80	40	35
3	35	105	35	25
4	30	120	30	15
5	25	125	25	5

1. يصبح الإيراد الحدي صفرًا عندما يكون عند الحد الأقصى للإيراد الكلي. بالنظر إلى الجدول، يمكننا ملاحظة أن الإيراد الكلي يزداد حتى $Q = 5$ولكنه قد يبدأ في الانخفاض بعد ذلك.
2. أعلى إيراد كلي هو 125، ويحدث عند .$Q = 5$

تمرين التاسع

1. **حساب الإيراد الكلي(TR)**

الإيراد الكلي هو حاصل ضرب السعر في الكمية:

$$TR=P\times Q$$

وبالتعويض عن :$P = 100 - 2Q$

$$TR=(100-2Q)Q=100Q-2Q^2$$

2. **حساب الإيراد المتوسط(AR)**

الإيراد المتوسط هو الإيراد الكلي مقسوماً على الكمية المنتجة:

$$AR=TRQ=100Q-2Q2Q=100-2Q$$

ونلاحظ أن الإيراد المتوسط يساوي السعرP، وهو أمر طبيعي في سوق احتكاري أو سوق منافسة غير كاملة.

3. **حساب الإيراد الحدي(MR)**

الإيراد الحدي هو مشتقة الإيراد الكلي بالنسبة للكمية:

$$MR=d(TR)/dQ=d(100Q-2Q^2)/dQ=100-4Q$$

4.

5. **حساب القيم عند :$Q = 20$**
   - الإيراد الكلي:

$$TR=100(20)-2(20)^2=2000-800=1200$$

   - الإيراد المتوسط:

$$AR=100-2(20)=60$$

   - الإيراد الحدي:

$$MR=100-4(20)=20$$

6. **إيجاد الكمية التي يكون عندها الإيراد الحدي مساوياً للصفر:**

$$100-4Q=0$$

$$Q=100/4$$

$$Q=25$$

عند $Q = 25$، يصبح الإيراد الحدي صفراً، مما يعني أن الإيراد الكلي يكون في أعلى نقطة له.