المحاضرة 5: تقييم الخيارات المالية: نموذج بلاك-شولز-ميرتون (The Black–Scholes–Merton Model)

المرجع المعتمد:

- Hull, J. C., & Basu, S. (2021). Options, futures, and other derivatives. Pearson Education.

1. خلفية تاريخية

في أوائل سبعينيات القرن العشرين، حقق فيشر بلاك (Fischer Black) ، ومايرون شولز (Myron Scholes) ، وروبرت ميرتون (Robert Merton) انجازا كبيرًا في تسعير خيارات الأسهم الأوروبية (European stock options). تمثل هذا الإنجاز في تطوير ما يُعرف الآن باسم نموذج بلاك-شولز-ميرتون (Black–Scholes–Merton Model) أو نموذج بلاك-شولز (Black–Scholes Model). كان لهذا النموذج تأثير هائل على طريقة تسعير المُشتقات والتحوط منها في الأسواق المالية. في عام 1997، تم الاعتراف بأهمية النموذج عندما مُنح روبرت ميرتون ومايرون شولز جائزة نوبل في الاقتصاد (Nobel Prize in Economics). لسوء الحظ، توفي فيشر بلاك عام 1995؛ وإلا لكان من المؤكد أن يكون أحد الفائزين بالجائزة.
اعتمد الباحثون السابقون على افتراضات مشابهة وحسبوا بدقة العائد المتوقع (expected payoff) من الخيار الأوروبي. ومع ذلك، كان تحديد معدل الخصم الصحيح (correct discount rate) لهذا العائد تحديًا كبيرًا. استخدم بلاك وشولز نموذج تسعير الأصول الرأسمالية (Capital Asset Pricing Model - CAPM) لتحديد العلاقة بين العائد المطلوب من السوق للخيار والعائد المطلوب للسهم. لم يكن هذا الأمر سهلاً، لأن العلاقة تعتمد على كل من سعر السهم والزمن.

أمانهج ميرتون فكان مختلفًا. اعتمد على إنشاء محفظة خالية من المخاطرة (riskless portfolio) تتكون من الخيار والسهم الأساسي، معتبرًا أن العائد على هذه المحفظة خلال فترة زمنية قصيرة يجب أن يكون مساويًا للعائد الخالي من المخاطرة. كان نهج ميرتون أكثر عمومية من نهج بلاك وشولز، لأنه لم يعتمد على افتراضات نموذج تسعير الأصول الرأسمالية (CAPM).

2. الافتراضات الأساسية للنموذج:

1. سعر السهم يتبع **توزيع عشوائي (توزيع الوغاريتم الطبيعي Lognormal distribution)**
2. التذبذب/الإنحراف المعياري (Volatility) ثابتة خلال فترة حياة الخيار.
3. لا توجد أرباح (Dividends) تُدفع خلال فترة الخيار (يمكن تعديل النموذج ليستوعب وجودها).
4. معدل الفائدة الخالي من المخاطرة (Risk-Free Rate) ثابت.
5. الأسواق كفيفة (لا يوجد فرص مراجحة).
6. الخيارات أوروبية
7. عدم وجود ضرائب وتكاليف للصفقات المالية

3. الصيغة الرياضية للنموذج

1.3. معادلة خيار الشراء (Call Option)

$$C=S_0N(d1)-Ke^{-rT}N(d2)$$

حيث:

- C سعر خيار الشراء.
- S_0 السعر الحالي للسهم.
- K سعر التنفيذ (Strike Price)
- r معدل الفائدة الخالي من المخاطرة (سنوي، مركب باستمرار).
- T الوقت حتى انتهاء صلاحية الخيار (بالسنوات).
- σ تذبذب سعر السهم (Volatility)
- N(x) دالة التوزيع التراكمي للانحراف المعياري الطبيعي (القيمة الاحتمالية حتى x)

حساب d_1 و d_2 :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

2.3. معادلة خيار البيع (Put Option)

$$P=Ke^{-rT}N(-d2)-S_0N(-d1)$$

حيث:

- P سعر خيار البيع.
- S_0 السعر الحالي للسهم.
- K سعر التنفيذ (Strike Price)
- r معدل الفائدة الخالي من المخاطرة (سنوي، مركب باستمرار).
- T الوقت حتى انتهاء صلاحية الخيار (بالسنوات).

- σ تذبذب سعر السهم (Volatility)
- $N(x)$ دالة التوزيع التراكمي للانحراف المعياري الطبيعي (القيمة الاحتمالية حتى x)

3.3. تعديل النموذج لمراعاة الأرباح (Dividends)

عندما يدفع السهم أرباحًا خلال فترة الخيار، يتم تعديل سعر السهم الحالي S_0 بخصم القيمة الحالية للأرباح الموزعة (Present Value of Dividends).

$$S_0^* = S_0 - PV(Dividends)$$

علما أن تذبذب سعر السهم يبقى ثابت.

معادلة خيار الشراء مع الأرباح:

$$C = S_0^* N(d1) - Ke^{-rT} N(d2)$$

معادلة خيار البيع مع الأرباح:

$$P = Ke^{-rT} N(-d2) - S_0^* N(-d1)$$

ملاحظات:

- التذبذب في أسعارالخيارات (σ) : تُستنتج عادةً من أسعار الخيارات في السوق

الأرباح تقلل سعر خيار الشراء وتزيد سعر خيار البيع (لأنها تخفض السعر المتوقع للسهم).

- الخيارات الأمريكية: قد يكون التنفيذ المبكر مربحًا قبل تاريخ توزيع الأرباح، مما يجعل تسعيرها أكثر تعقيدًا (يتطلب نماذج مثل ذو الحدين).

مثال 1:

البيانات:

- السعر الحالي للسهم50$ = (S_0)
- سعر التنفيذ 50$ = (K)
- معدل الفائدة 5% = (r) سنويًا (0.05)
- التذبذب 30% = (σ) سنويًا (0.3)
- المدة حتى الانتهاء 1 = (T) سنة

المطلوب:

- أحسب سعر خيار الشراء
- أحسب سعر خيار البيع

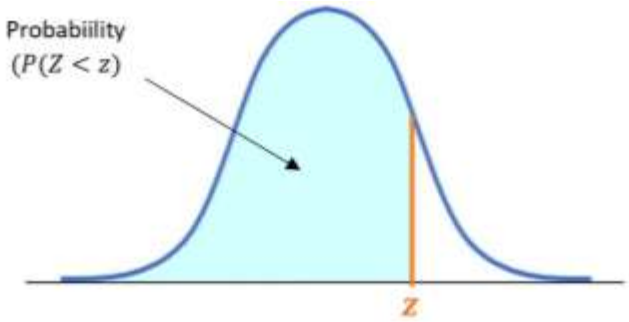
مثال 2:

البيانات:

- نفس بيانات المثال السابق مع **أرباح متوقعة** 2$:تُدفع بعد 6 أشهر (0.5 سنة).

المطلوب:

- أحسب سعر خيار الشراء
- أحسب سعر خيار البيع



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998