المحاضرة 5: تقييم الخيارات المالية: النموذج الثنائي (Binomial Model)

المرجع المعتمد:

- Hull, J. C., & Basu, S. (2021). Options, futures, and other derivatives. Pearson Education.

تمهيد:

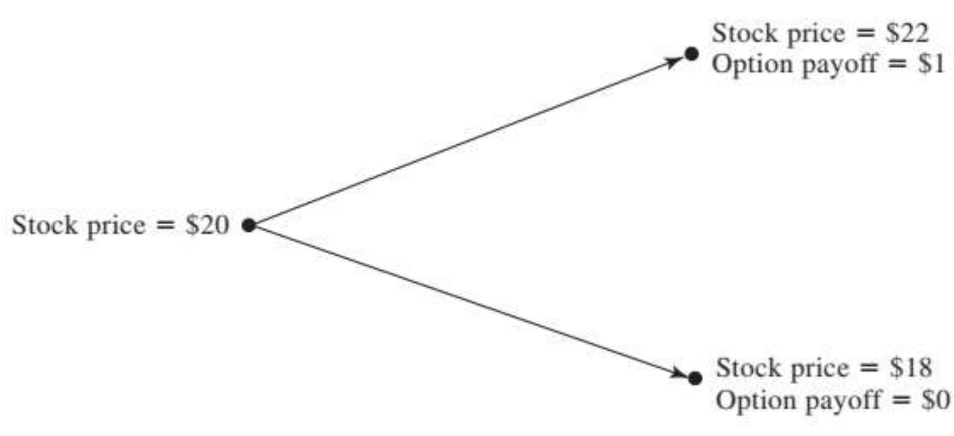
من بين التقنيات المفيدة والشائعة لتسعير الخيارات بناء **شجرة ثنائية** (Binomial Tree) يُعتبر هذا المخطط تمثيلًا مرئيًا للمسارات المختلفة التي قد يتبعها سعر السهم خلال فترة حياة الخيار. يفترض هذا النموذج أن سعر السهم يتبع **حركة عشوائية** (Random Walk) ؛ حيث يكون له احتمال محدد للارتفاع بنسبة مئوية معينة واحتمال آخر للانخفاض بنسبة مئوية محددة في كل خطوة زمنية. عند تقليص الفترة الزمنية إلى حدود دنيا، يصبح هذا النموذج مطابقًا لنموذج **بلاك-شولز-ميرتون** (Black–Scholes–Merton) الذي سنناقشه في المحاضرة القادمة.

1. **نموذج ثنائي لفترة واحدة** (One-Step Binomial Model) وحجة عدم المراجحة (No-Arbitrage Argument)

لنبدأ بتحليل سيناريو مبسط: كمثال أولي

- السعر الحالي للسهم 20 دولارًا.
- التوقعات بعد 3 أشهر :سيرتفع السعر إلى 22دولارًا أو ينخفض إلى 18دولارًا.
- الخيار المعني :خيار شراء أوروبي (European Call Option) مع سعر تنفيذ (Strike Price) 21 دولارًا يستحق بعد 3 أشهر.

إذا ارتفع السهم إلى 22دولارًا :قيمة الخيار 1 = دولار (1 = 21 - 22) وإذا انخفض إلى 18دولارًا :قيمة الخيار =0 دولار لأن السعر أقل من سعر التنفيذ.



خطوات التسعير باستخدام حجة عدم المراجحة:

a) **بناء محفظة خالية من المخاطرة (Riskless Portfolio):**

تتكون المحفظة من **مركز طويل (Long Position)** في **Δ** نسبة من سهم شركة ما و**مركز قصير (Short Position)** في **1 وحدة من خيار الشراء**. **هدفنا** إيجاد قيمة **Δ** التي تجعل قيمة المحفظة خالية من المخاطر.

b) **حساب قيمة Δ:**

– إذا ارتفع سعر السهم إلى **22دولارًا**: قيمة نسبة السهم المشتراة هي 22Δ وقيمة الخيار هي 1 دولار ومنه قيمة المحفظة هي 22Δ–1 .

– إذا انخفض السهم إلى **18دولارًا**: قيمة نسبة السهم المشتراة هي 18Δ وقيمة الخيار هي 0 دولار ومنه قيمة المحفظة هي 18Δ

– تكون المحفظة خالية من المخاطر إذا تم اختيار قيمة Δ بحيث تكون القيمة النهائية للمحفظة هي نفسها لكلا البديلين. وهذا يعني أن: 18Δ=22Δ–1 ومنه: Δ = 0.25

إذا ارتفع سعر السهم إلى 22 دولارًا، فإن قيمة المحفظة هي

22 * 0.25 - 1 = 4.5

إذا انخفض سعر السهم إلى 18 دولارًا، فإن قيمة المحفظة هي

18 * 0.25 = 4.5

بغض النظر عما إذا كان سعر السهم يتحرك صعودًا أو هبوطًا، فإن قيمة المحفظة دائمًا 4.5 في نهاية عمر الخيار. يجب على المحافظ الخالية من المخاطر، في غياب فرص الترجيح، أن تحقق قيمة مساوية لمعدل العائد الخالي من المخاطر. افترض أنه في هذه الحالة، يكون معدل العائد الخالي من المخاطر 4% سنويًا . نتيجة لذلك يجب أن تكون قيمة المحفظة اليوم (القيمة الحالية) 4.5، أو

$4.5e^{-0.04*3/12} = 4.455$

من العلاقة $npv=cf/(1+r)^t$

إذا كانت قيمة سعر السهم اليوم 20 دولارًا. لنفترض أن سعر الخيار يُشار إليه بـ f. قيمة المحفظة اليوم هي

$20 * 0.25 - f = 5 - f$

ويترتب على ذلك أن

$5 - f = 4.455$

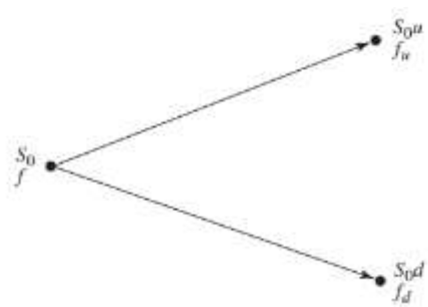
أي

f = 0.545

وهذا يوضح أنه في غياب فرص المراجحة، يجب أن تكون القيمة الحالية للخيار 0.545. وإذا كانت قيمة الخيار أكبر من 0.545، فإن تكلفة إنشاء المحفظة ستكون أقل من 4.455 وستكسب أكثر من معدل الخالي من المخاطر. وإذا كانت قيمة الخيار أقل من 0.545، فإن بيع المحفظة على المكشوف سيوفر وسيلة لاقتراض المال بسعر أقل من معدل الخالي من المخاطر. ومن غير الممكن بالطبع تداول 0.25 سهم. ومع ذلك، فإن الحجة هي نفسها إذا تخيلنا بيع 400 خيار وشراء 100 سهم. وبشكل عام، من الضروري شراء Δ سهم لكل خيار مباع لتكوين محفظة خالية من المخاطر. والمعامل Δ (دلتا) مهم في التحوط بالخيارات.

2. تعميم

يمكننا تعميم حجة عدم المراجحة (no-arbitrage argument) المقدمة سابقًا من خلال النظر إلى سهم سعره الحالي S_0 وخيار على هذا السهم (أو أي مشتق آخر يعتمد على السهم) سعره الحالي f نفترض أن الخيار يستمر لفترة زمنية T ، وخلال مدة الخيار يمكن أن يتحرك سعر السهم إما صعودًا من S_0 إلى مستوى جديد S_0u حيث $(u > 1)$ أو هبوطًا من S_0 إلى مستوى جديد S_0d حيث $(d < 1)$. النسبة المئوية للزيادة في سعر السهم عند الحركة الصاعدة هي $u - 1$ ؛ بينما النسبة المئوية للانخفاض عند الحركة الهابطة هي $1 - d$ إذا تحرك سعر السهم صعودًا إلى S_0u نفترض أن العائد من الخيار سيكون f_u ؛ وإذا تحرك سعر السهم هبوطًا إلى S_0d ، نفترض أن العائد من الخيار سيكون f_d.



كما في السابق، نتخيل محفظة تتكون من مركز طويل (long position) في Δ أسهم ومركز قصير (short position) في خيار واحد. نحسب قيمة Δ التي تجعل المحفظة خالية من المخاطرة. إذا حدثت حركة صاعدة في سعر السهم، فإن قيمة المحفظة في نهاية مدة الخيار ستكون :

$$S_0u\Delta - f_u$$

وإذا حدثت حركة هابطة، تصبح القيمة :

$$S_0d\Delta - f_d$$

تكون القيمتان متساويتين عندما :

$$S0u\Delta - fu = S0d\Delta - fd$$

$$\Delta = (fu - fd)/(S0u - S0d)$$

في هذه الحالة، تكون المحفظة خالية من المخاطرة، ولضمان عدم وجود فرص مراجحة(arbitrage) ، يجب أن تحقق معدل الفائدة الخالي من المخاطرة .(risk-free interest rate) تُظهر المعادلة السابقة أن Δ هو نسبة التغير في سعر الخيار إلى التغير في سعر السهم عند الانتقال بين العقد الزمنية في الوقت T .

إذا رمزنا إلى معدل الفائدة الخالي من المخاطرة بـ r ، فإن القيمة الحالية (present value) للمحفظة هي :

$$(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

بينما تكلفة إنشاء المحفظة هي :

$$S0\Delta - f$$

ويترتب على ذلك أن :

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

or

$$f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

Substituting from equation (13.1) for Δ, we obtain

$$f = S_0\left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}\right)(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

or

$$f = \frac{f_u(1 - de^{-rT}) + f_d(ue^{-rT} - 1)}{u - d}$$

or

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1 - p)f_d]$$

where

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

تسمح المعادلتان السابقتان بتسعير الخيار عندما تكون تحركات سعر السهم مُعطاة بشجرة ثنائية من خطوة واحدة .(one-step binomial tree)الافتراض الوحيد المطلوب لهذه المعادلة هو عدم وجود فرص مراجحة (arbitrage) في السوق .