II - الشجرة المرجحة (شجرة الاحتمالات)

مقدمة

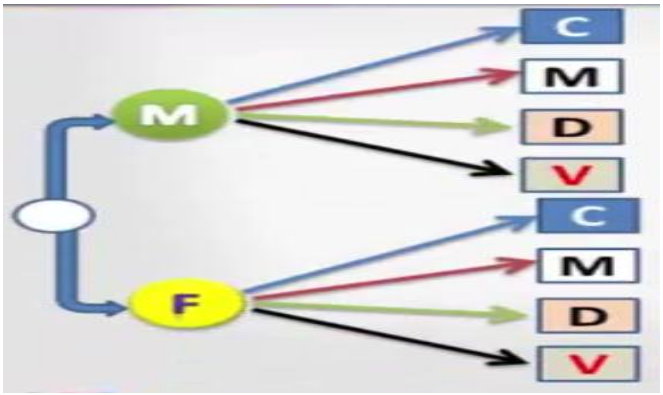
تساعدنا شجرة الاحتمالات على نمذجة تجربة عشوائية بها حالات التي تتصف بنوع من التعقيد كما انها تمكننا من تخطي الحالات التي تتولى (تتعاقب) فيها الاحتمالات مثلا تجربة على مرحلتين حيث أن نتيجة التجربة الثانية مرتبطة بنتيجة التجربة الأولى (كالاحتمالات الشرطية) .

1- أنواع شجرة الاحتمالات :

هناك نوعان :

- شجرة الإمكانات
- شجرة الترجيح (الشجرة المرجحة)

1-1 - شجرة الإمكانات . Arbre des possibilités



عندما نقوم بإدراج الحالات الممكنة لأي تجربة نكون بصدد شجرة الإمكانات

مثلا الجنس و الحالات العائلية :

2-1 - الشجرة المرجحة . Arbre ponderé

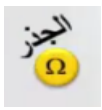
هنا نقوم بإضافة الاحتمالات المقابلة لكل حادث على شجرة الإمكانات .

الشجرة المرجحة : مفاهيم و مصطلحات

قواعد إدراج الشجرة المرجحة

أ- الجذر la racine

لا يمن تصور شجرة بدون جذر و هذا منطقي هنا الجذر يتجلى في فراغ الإمكانات محل الدراسة ، و تعكس بداية التجربة و يرمز له ب:



مثلا : رمي قذعة نقود : $\Omega=\{P , F\}$

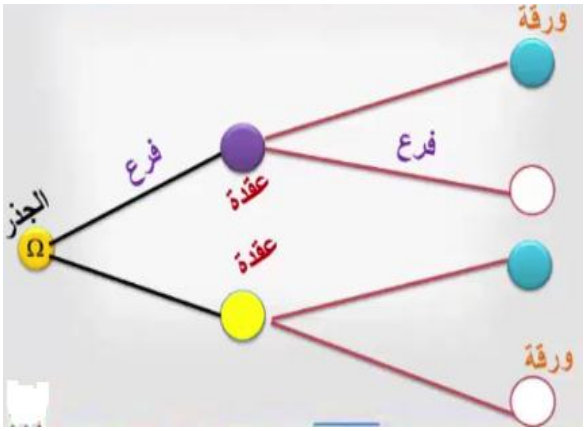
ب- العقدة Le noeud

تعكس كل عقدة حدث من أحداث الفضاء التربة محل الدراسة ، مثلا عند رمي قطعة نقود يكون لدين عقدتين إحداهما تمثل P و الثانية تمثل F :

ت – الورقة La feuille

و هي بمثابة عقدة متميزة تمثل و عند الضرورة حادث أخر نقطة فرع او فروع أخرى و عندها تصبح نقذة انطلاق مستوى ثاني و إذ ما تلتها أحداث أخرى تصبح الورقة بمثابة عقدة من مستوى ثان .

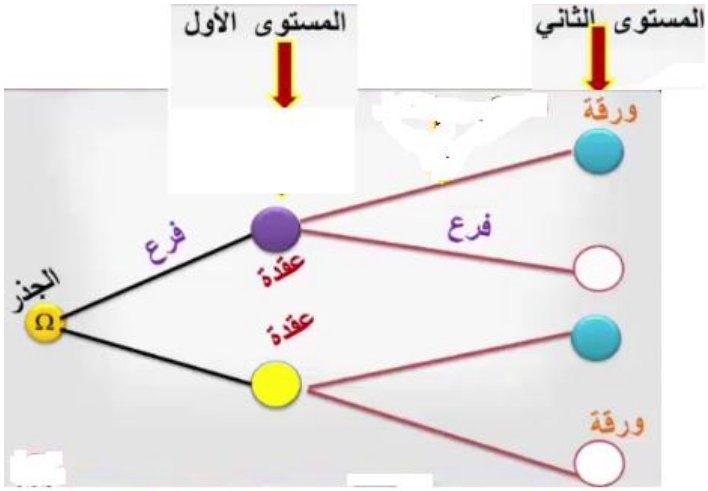
ث – الفرع - Branche



الفروع هي الخطوط التي تربط بين الجذر و العقد ة و و تحمل احتمال تحقق هذه الحادث الوارد بالعقدة

كما يربط العقدة بالورقة و أيضا ما يحمله من احتمال شرطي

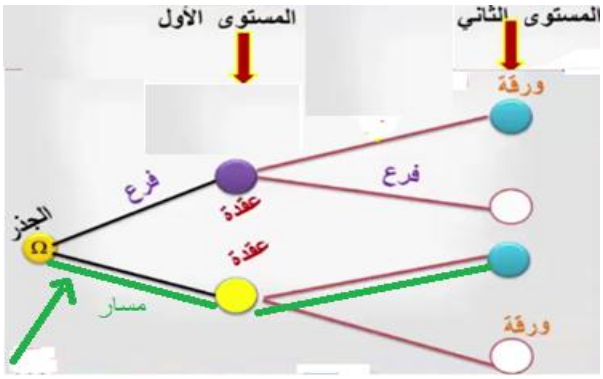
ج – المستوى – Niveau



يتزقف عدد المستويات على عدد التفرعات

هنا مثلا لدينا مستويين:

- المستوى الأول يتمثل في وضع الأحداث عند العقد
- المستوى الثاني يتمثل في وضع الأحداث عند الأوراق



ح – المسار - Le Chemin

ينطلق من الجذر و يبلغ الورقة من خلال مروره على العقد

مثال

هنا لدينا اربع مسارات .

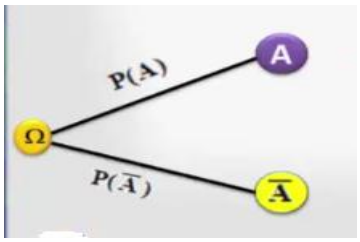
مثال :

لنفرض انه لدينا حادثين و Aو B

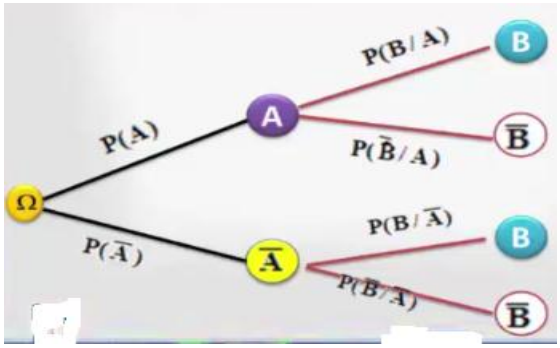
الإمكانية الأولى : من منظور A و بالتالي فالحادث المتمم هو A فتحة

مثلا المتمم للذكر هو الأنثى و المتمم للصورة هو الشعار ....إلخ

- المستوى الأول :

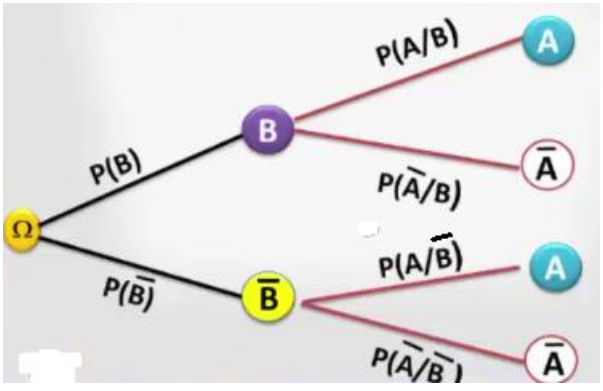


المستوى الثاني



طبعا الإمكانية الثانية تتجلى في إمكانية إدراج الشجرة من منظور B و ذل كما يلي :

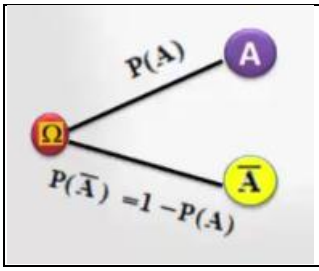
مثلا إذا كان A يمثل كون المولود ذكر ، هنا B يمثل كون المولود بنت

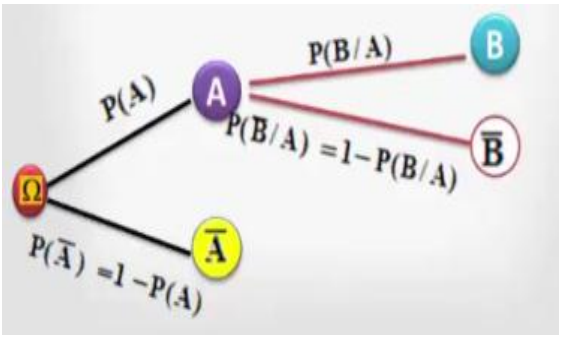


طبعا من ناحية الحسابات المتعلقة بالاحتمالات فإن النتائج واحدة و بالتالي عندما نون بصدد الاحتمالات الشرطية نتفي بإدراج شجرة و احدة و من منظور واحد .و هذا تماشيا مع المعطيات الموجودة بالمسألة . مع ترجمة الأرقام إلى احتمالات و ذلك

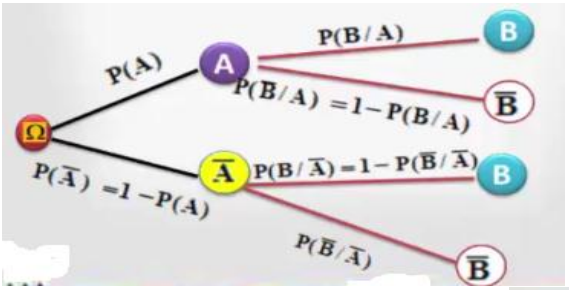
- أولا من خلال قراءة النص عدة مرات
- ثانيا التركيز على المعلومات الرقمية و كيفية توظيفها
- ثالثا مدلول المصطلحات المعتمدة للتفرقة مثلا بين التقاطع و المعلومة و الاحتمال الشرطي و الاستقلال و التنافي ، ...إلخ
- رابعا تساعدنا قواعد الشجرة في استخلاص بعض القيم المجهولة

قواعد الشجرة

قاعدة 1: قانون العقد – "LOI DES NŒUDS" **"مجموع الاحتمالات عند الفروع التي تتفرع من نفس العقدة تساوي 1 "**	



بمعلومية احتمال تحق الحادث A يمننا استخلاص قيمة الحادث المتمم و العكس بمعلومية الحادث المتمم يمكننا استخلاص قيمة الحادث الأصلي .
نفس القاعدة يمكن اعتمادها عند المستوى الثاني اي الاحتمالات الشرطية "



و هذا يعني أنه و بمعلومية P(B/A) يمكننا من استخلاص $P(B_{bare}/A)$ و العكس

مثال :

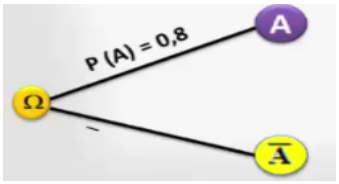
لنفرض انه لدينا حدثان A و B و نرمز بـ $\overline{A}$ و $\overline{B}$ للحوادث العكسية .
و لنفرض انه لدينا المعلومات الرقمية التالية و التي تم استخلاصها من نص المسألة :

$$P(A) = 0,8 \quad , P(B/A) = 0,7 \quad , P(\overline{B}/\overline{A}) = 0,4$$

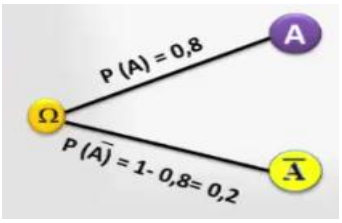
لندرج الشجرة المرجحة و نحملها بأكبر قدر من المعلومات الرقمية .

الحل لنعمل على تطبيق كل القواعد المذكورة سالفا و بالذات قاعدة العقد " القاعدة واحد "

الخطوة الأولى :

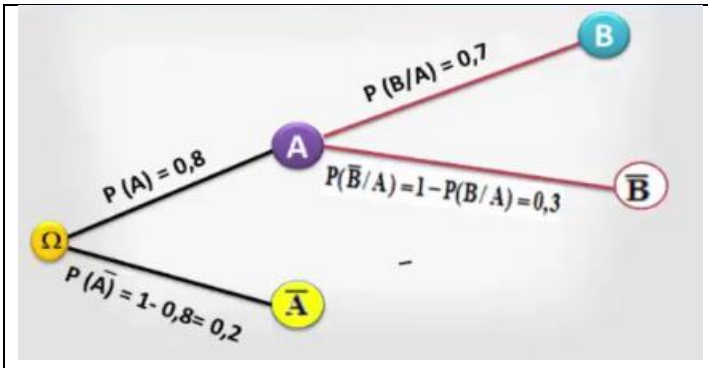


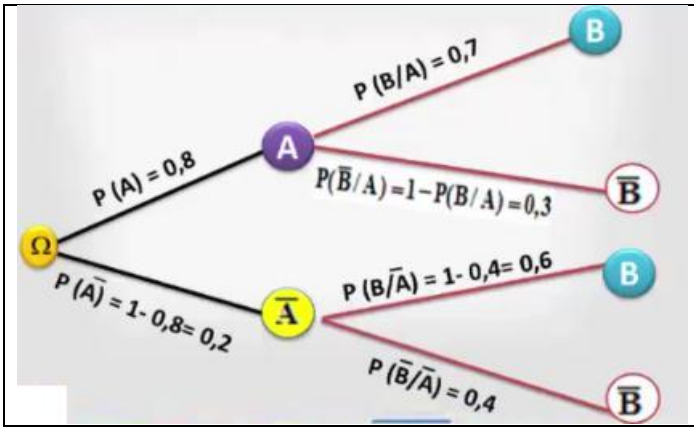
تطبيق قاعة العقد يمننا من حساب الحادث المتمم لa اي : $P(A_{bare})$,



$$\mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2}$$

بهذا نكون قد انهينا المستوى الأول من الشجرة .

لننتقل إلى المستوى الثاني من الشجرة و الذي يتجلى في الاحتمالات الشرطية . اعطيت لنا $P(B/A)$ ($P(B/A)= 0,7$) هذا يعني يمكنن استخلاص $P(B_{bare}/A)$ $\mathbf{P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0,7 = 0,3}$	

اي : و أيضا أعطيت لنا $\mathbf{P(\overline{B}/\overline{A}) = 0,4}$ هذا يعني يمكنن استخلاص $P(A_{bare}/B)$ $\mathbf{P(B/\overline{A}) = 1 - P(\overline{B}/\overline{A}) = 1 - 0,4 = 0,6}$ اي	

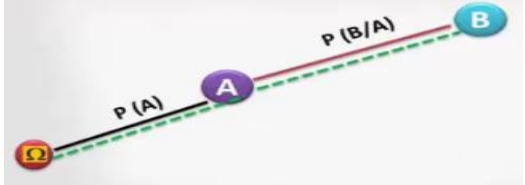
بهذا نكون قد حملنا كل افرع الشجرة بالاحتمالات المقابلة و بالتالي الإجابة عن اي تشاؤل يطرح .

قاعدة 2 : قانون المسارات – LOI DES CHEEMINS

" احتمال مخرج ممثل بمسار يساوي إلى جداء الاحتمالات التي تتواجد على الفروع المونة للمسار "

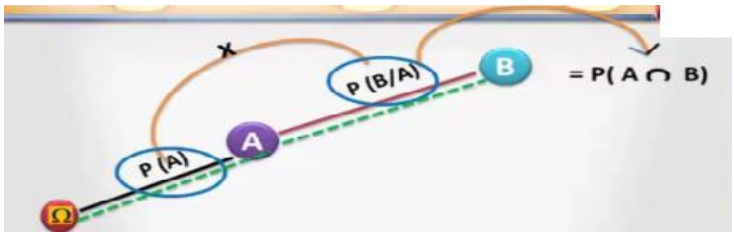
المخرج ؟ هو احتمال تقاطع الحادث المدرج عند العقدة مع الحادث النهائي و المدرج عند الورقة "

مثال

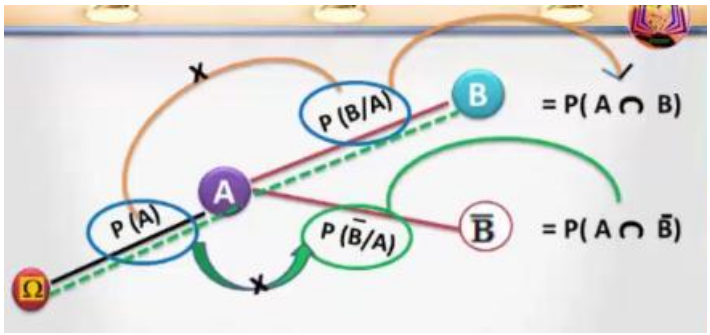


نعتمد نفس الشجرة و نتنقل تدريجيا على فروعها :

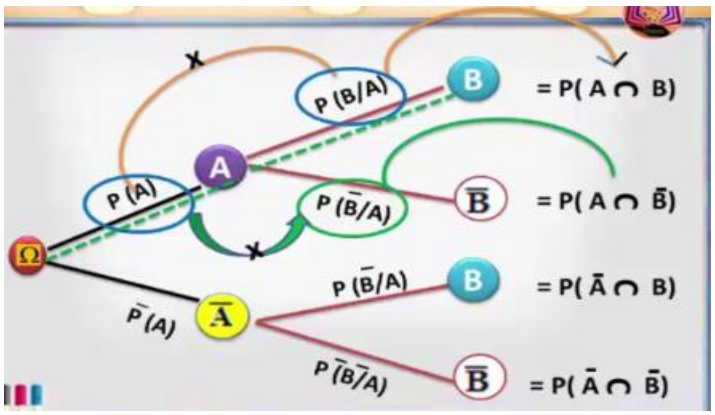
لنطبق القاعدة الثانية

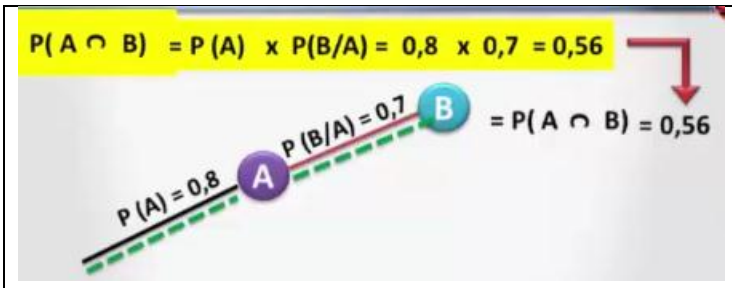


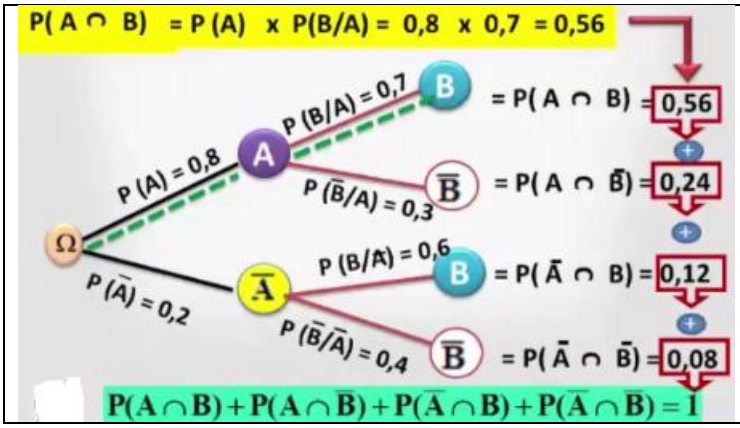
بنفس الطريقة يمكننا التنقل للمسار الثاني

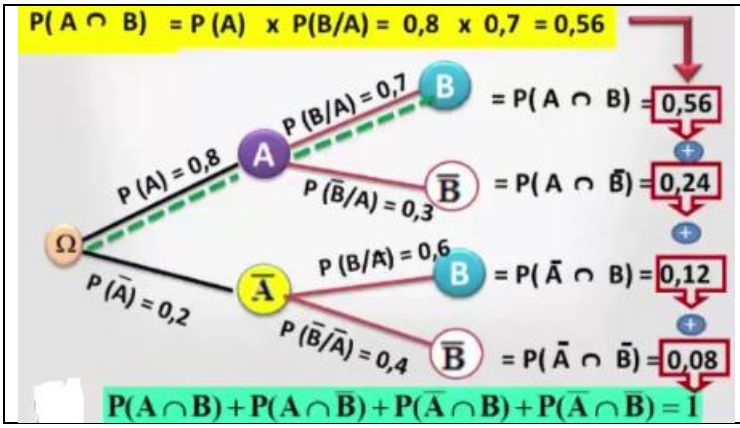


و بنفس الطريقة يمكننا الانتقال غلى بقية المسارات



لنصب القيم محل الصيغ الاحتمالية القيم فينتج لدينا ما يلي : مثلا المسار الأول من الأعلى يعطينا :	

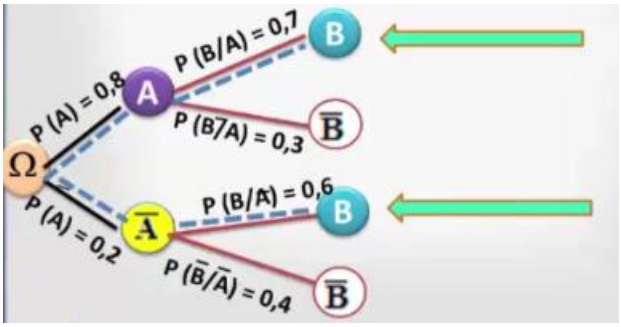
بنفس المنهجية يمكننا حساب بقية التقاطعات :	

يمكنك التأكد من عدم حدوث خطأء تطبيق او حساب من خلال التأكد أن مجموع المخارج يساوي واحد .	

قاعدة 3 " قانون الاحتمال الكلي "LOI DES PROBABILITES TOTALES

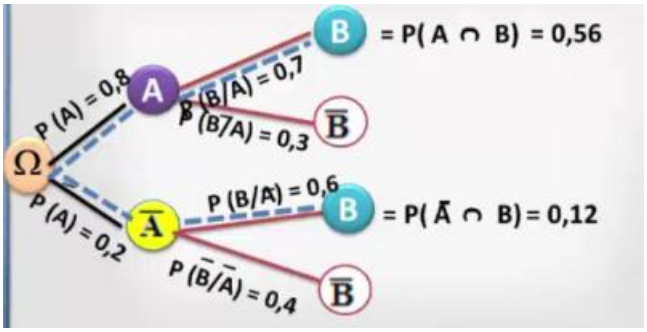
" احتمال حادث ما و ليكن A هو مجموع احتمالات المخارج المقابلة للمسارات التي تؤدي لتحقق الحادث A "

مثال



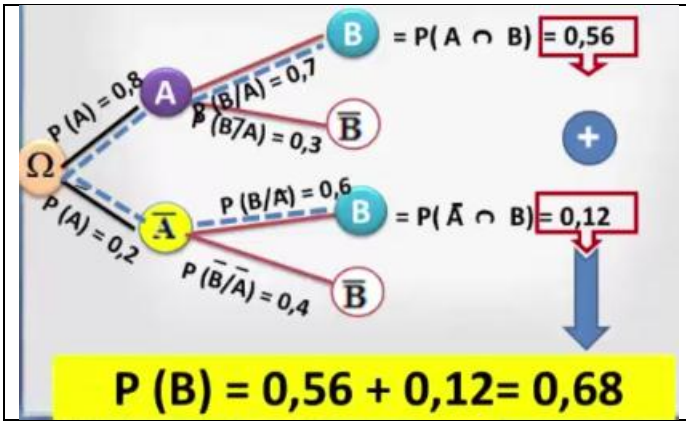
مثالنا ينتهي ب B إذا لنحسب احتمال B .

نلاحظ على الشجرة ان الحادث B يقع عند مخرجين : عند المسار الأول و الثالث



الاحتمالات لهذين المسارين قد تم حسابهما سابقا عند تطبيق القاعدة 2

اي

ومجموع المخرجين يعطينا احتمال الحادث B	

تمرين :

ورشتان Aو Bلتصنيع رقائق إلكترونية. تحصلت على طلبية لإنتاج 200 قطعة الورشة A ساهمت بـ 60% من إنتاج الطلبية و الباقي تكفلت به الورشة B من خلال السجل التاريخي للورشتين لاحظت مصلحة المراقبة أن الورشة A تنتج 10%. رقائق معيبة بينما تساهم الورشة في المعيب بنسبة : 5% قبل تسليم الطلبية تم سحب شريحة عشوائيًا منها .

لنفرض ان :

- A هو حادث يمثل "الرقاقة من إنتاج الورشة A" ،
- B هو حادث يمثل "الرقاقة من إنتاج الورشة B" ،
- D هو حادث كون الشريحة معيبة

المطلوب :

1 -إعادة إدراج الجدول الموالي مع تعبئته .

μ

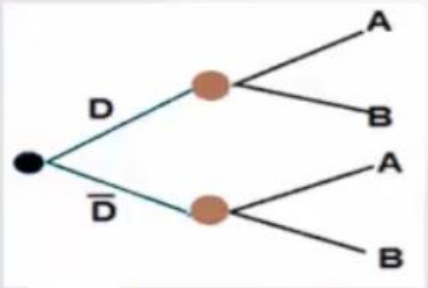
	الشرائح التالفة	الشرائح الصالحة	المجموع
الشرائح المنتجة من A			
الشرائح المنتجة من B			
المجموع			

2- باستخدام الجدول احسب ما يلي :

أ- $P(D)$ و $P(A \cap D)$ و $P(A/D)$

ب- $P(\overline{D})$ ؛و $P(\overline{D} \cap B)$ و $P(B/\overline{D})$

ج:أدرج الشجرة المقابلة مع تحميلها اكبر قدر من المعلومات الرقمية .



الحل

يجب الرجوع إلى اليوتيب الذي يحمل عنوان الإحتمال الشرطي ج2 (بالتوفيق .) و في حال عدم الفهم يمنكم طرح سؤال في اليوتيب و ستتلقون الإجابة إن شاء الله .