الاحتمال الشرطي

تعريف الاحتمال الشرطي :

و هذا ما يمكن ان نعبر عنه بما يلي :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

طبعا و هنا الصورة العكسية :

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

*طرق دراسة الاحتمال الشرطي

تتم دراسة الاحتمال الشرطي و فق ثلاثة طرق :

- الطريقة الجدولية ،
- طريقة الشجرة المرجحة
- طريقة مخطط فيان .

لكننا نكتفي هنا فقط بدراسة الطريقتين الأولى و الثانية

1- الطريقة الجدولية:

نعمل على فهم منهجية الطريقة الجدولية من خلال مثال **تكون معطيات قريبة من الواقع و تبقى قيم الجدول الذي سنعتمده قيم افتراضية:**

مثال :.

وحدة إنتاج (ورشة) تستخدم ألتين A و B في إنتاج منتوج محدد من اختصاصاها ، وكل ألة خلال إنتاجها يحدث أن يكون المنتوج غير صالح D . (Defectueux)

و بفرض ان 60% من إنتاج الوحدة تنتجها الألة A

قمنا بسحب 100 قطعة من ضمن إنتاج الوحدة الإنتاجية (الورشة) بصورة عشوائية فكانت نتائج الفحص كما هي ملخصة بالجدول

- **جدول تلخيصي**

	الألة A	الألة B	المجموع
منتوج تالفD	7	5	12
منتوج صالح $\overline{D}$	53	35	88
المجموع	60	40	100

قراءات من الجدول :

*** إلإنتاج الكلي بالوحدة**

- في الجدول و عند تقاطع السطر الأخير مع العمود الأخير العدد 100 هو نتاج المجموع الأفقي أو العمودي بدلالة إما :
- إنتاج الألتين أو ونتيجة الفحص التالف و الصالح .

طبعا هنا قررنا اخذ عينة من 100 حتى تسهل لدينا العمليات الحسابية ، و يكون عند التحليل التعبير بالنسبة المئوية. غايتنا هنا بيداغوجية

أولا: قراءات في الهوامش

نقصد بذلك المجاميع السطرية و العمودية

- نسحب عشوائيا منتوج من إنتاج الوحدة الإنتاجية محل المعاينة و نعتبر الحوادث التالية :

✓ -الحادث A: ; و الذي يعني ان " المنتوج من إنتاج الألة A "

✓ -الحادث B و الذي يعني ان " المنتوج من إنتاج الألة B "

✓ -الحادث D: و الذي يعني ان لمنتوج المسحوب تالف ".

الحادث $\overline{D}$ و الذي يعني ان لمنتوج المسحوب صالح (التعبير الرمزي هو غير تالف : اي الحادث المتمم للحادث D".)

- **وضعية المنتجات المفحوصة**

هذه الوضعية يمكننا بلوغها من خلال القراءة السطرية عند خانة المجموع .

- **السطر الأول**

وجدنا و في نهاية السطر الأول المجموع 12 و هو يقابل القطع التالفة عند الألتين Aو B لا ومنه فلا حتمال المقابل ، احتمال سحب قطعة تالفة من إنتاج الوحدة ككل هو :

$$P(D) = \frac{12}{100} = 0,12$$

هنا :

لا يهمنا باقي الفضاء و نقصد دون تحديد مصدر التلف هل هو الألة الأولى A ام الألة الثانية B

- و بمفهوم المتمم

فإذا كان المنتوج غير تالف أي تحقق $\overline{D}$ فهذا يعني أنه صالح و يساوي إلى :

$$P(\overline{D}) = P(C) = 1 - P(D) = 1 - 0,12 = 0,88$$

- هذا يعني أن 88 قطعة صالحة و هو ما يقابل المجموع الموجود بالسطر الثاني عند الألتين.

ومنه فاحتمال المقابل احتمال سحب قطعة تالفة هو:

$$P(C) = P(\overline{D}) = \frac{88}{100} = 0,88$$

و هذا ما بلغناه في الخطوة السابقة

طبعا: الوحدة المسحوبة فهي إما صالحة D او تالفة C و لا يمكن ان تكون صالحة و تالفة في ان واحد و بالتالي فالحدثان متنافيان :

هنا

نحن بصدد مبدأ التجميعي في حالة التنافي و بالتالي نحن بحاجة إلى قاعدة الجمع الخاصة :

$$P(D \cup \overline{D}) = P(D) + P(\overline{D}) = 0,12 + 0,88 = 1$$

- **وضعية الإنتاج عند الوحدة**

هذه الوضعية يمكننا بلوغها من خلال القراءة العمودية عند خانة المجموع .

-العمود الأول

-ما يقابل المجموع عند العمود الأول هو ما تم إنتاجه من طرف الألة A و عدد القطع المنتجة هو 60 وحدة إنتاج . و هو يقابل الوحدات التالفة و الصالحة عند الأ لة A ومنه :

- فالاحتمال المقابل ، احتمال سحب قطعة من إنتاج الآلة A هو :

$$\mathbf{P(A) = \frac{60}{100} = 0,6}$$

هنا : لا يهمنا الباقي (نقصد بذلك المنتوج تالف او صالح)

- فإذا كان المنتوج من إنتاج الألة A فهذا يعني أنه ليس من إنتاج الألة B و يساوي إلى :

$$\mathbf{P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4}$$

- هذا يعني أن 40 قطعة هي من إنتاج الألة B و هو ما يقابل المجموع الموجود بالعمود الثاني و العاكس للوحدات المنتجة من طرف الألة B التالفة و الصالحة.

ومنه فلاحتمال المقابل احتمال سحب قطعة من إنتاج الألة B هو :

$$\mathbf{P(B) = \frac{40}{100} = 0,4}$$

و هذا ما بلغناه في الخطوة السابقة

الوحدة المسحوبة فهي إما إنتاج الألة A او إنتاج الألة B و لا يمكن ان تكون صالحة و تالفة في ان واحد و بالتالي فالحدثان متنافيان :

نحن بصدد مبدأ التجميعي في حالة التنافي و بالتالي نحن بحاجة إلى قاعدة الجمع الخاصة :

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,6 + 0,4 = 1}$$

الدخول إلى داخل الجدول

بعدما درسنا مدلول الهوامش عند الأعمدة و الأسطر لندخل الأن داخل الجدول و هو الخوض في حساب الاحتمالات الشرطية أساسا و هذا يعني ان في البداية سنعمل على التضيق على مجال الإمكانات .نقصد بذلك أننا نركز فقط على صفتين دون الاهتمام بالباقي

طبعا تماشيا مع الاحتمال الشرطي لدينا نقطة الانطلاق هي : **P(A/D)** و الذي يعني احتمال تحقق الحادث Aعلما ان الحادث D قد تحقق .

اي احتمال ان القطعة التي تم سحبها هي من إنتاج الألة A علما انها تالفة D .

إذا فالصفتان هما :

- الصفة الأولى :الإنتاج الكلي بالوحدة (لأننا نسحب قطعة من الإنتاج الكلي)
- الصفة الثانية : التلف عند الألة A و هو هنا 7 قطع ومنه :

فاحتمال ان يكون المنتوج المسحوب قد تم إنتاجه بالألة A هو :

$$P(D \cap A) = \frac{7}{100}$$

و هو ناتج تقاطع السطر الأول مع العمود الأول (و التي تقابل اول خانة داخلية بالجدول

و بالتالي احتمال ان يكون المنتوج صالح ومن إنتاج الألة Aهو ناتج تقاطع السطر الثاني المقابل للقطع الصالحة مع العمود الأول المقابل لإنتاج لإنتاج لألة A (مباشرة تحت العدد 7) اي نبقى عند إنتاج الألة A و نتنقل عبر صفات المنتوج تالف و صالح.هو:

$$P(\overline{D} \cap A) = \frac{53}{100}$$:

و احتمال ان يكون المنتوج من إنتاج انتاج الألة A بغض النظر عن كونه صالح أو تالف هو:

$$P(A) = \frac{7}{100} + \frac{53}{100} = \frac{60}{100} = 0,6$$

و هو ما وجدناه عند قراءتنا للهوامش العمودية و الذي يعكس احتمال سحبنا لقطعة من إنتاج الألة A

الاحتمال الشرطي من الجدول

	الألة A	الألة B	المجموع
منتوج تالفD	7	5	12
منتوج صالح	53	35	88

100	40	60	المجموع

- **العدد 7:**

لنتطلع إلى العدد 7 مثلا داخل الجدول

- سطريا يعني إجمالي عدد الوحدات التالفة من إنتاج الألة A

عموديا يعني عدد الوحدات التالفة من إجمالي القطع المنتجة من طرف الألة A و هذا ما يعبر عنه بما يلي : P(A/D) يعني مدى مساهمة الألة A في إنتاج التالف (و هو هنا 7 قطع) من إجمالي الإنتاج التالف بغض النظر عن من ساهم فيه و هو هنا 12 قطعة تالفة .

و بعبارة أخرى فالعدد 12 يعني أن القطعة التالفة لا يمكن ان تكون إلا من الإنتاج التالف عند الوحدة الإنتاجية بغض النظر عن الألة السبب ومنه فإن :

احتمال ان يكون المنتوج من إنتاج الألة A علما انه منتوج صالح يساوي الذي يعبر عنه كما يلي P(A/D) هو :

$$P(A/D) = \frac{7}{12} = 0,5833 \approx 0,58$$

*** للصورة العكسية للشرطية P(D/A)**

يعني اننا نهتم فقط بما تم إنتاجه من طرف الألة A و عددهم 60 و الذين كانوا تالفين D من ضمن هذا الإنتاج و عددهم 7 اي و بعبارة أخرى:

تأكدنا أن القطعة المسحوبة هي من إنتاج الألة A و هنا نتسأل ما هو احتمال ان تكون تالفة , (فالتالفة لا يمكن ان تكون إلا من إنتاج الألة A و هذه الأخيرة تساهم بما مقداره 7 وحدات في إنتاج التالف) و هو ما يقابل الاحتمال التالي :

$$P(D/A) = \frac{7}{60} = 0,1166 \approx 0,117$$

هذا تحليلنا للقيمة الأولى عند السطر الأول العمود الأول .

- **العدد 5 بالجدول :**

نفس التحليل يمكن تطبيقه على العدد الموجود بالسطر الأول العمود الثاني و الذي يقابل العدد 5

- سطريا يعني إجمالي عدد الوحدات التالفة من إنتاج الألة B
- عموديا يعني عدد الوحدات التالفة من إجمالي القطع التالفة عند الألتين :

و هذا ما يعبر عنه بما يلي : P(B/D) يعني مدى مساهمة الألة B في إنتاج التالف (و هو هنا 5 قطع) من إجمالي الإنتاج التالف بغض النظر عن من ساهم فيه و هو هنا 12 قطعة تالفة .

و بعبارة أخرى فإن :

احتمال ان يكون المنتوج من إنتاج الألة B علما انه منتوج تالف و الذي يعبر عنه كما يلي P(B/D) هو احتمال ان يكون المنتوج من إنتاج الألة B علما انه تالف و الذي يكتب كما يلي :

$$\mathbf{P(B/D) = \frac{5}{12} = 0,417}$$

. * **الصورة العكسية للشرطية**

يعني اننا نهتم فقط بما تم إنتاجه من طرف الألة B و عدده40 قطعة و الذين كانوا تالفين D من ضمن هذا الإنتاج و عددهم 5

و بعبارة أخرى:

تأكدنا أن القطعة المسحوبة هي من إنتاج الألة B و هنا نتسأل ما هو احتمال ان تكون تالفة , (فالتالفة لا يمكن ان تكون إلا من إنتاج الألة B و هذه الأخيرة تساهم بما مقداره 5 وحدات في إنتاج التالف) و هو ما يقابل الاحتمال التالي :

$$\mathbf{P(D/B) = \frac{5}{40} = 0,125}$$

اي احتمال ان يكون المنتوج تالف علما انه من إنتاج الألة B

السطر الثاني من الجدول

يمكننا ان ننتقل إلى السطر الثاني بداخله ايضا لنا قيمتنا : 53 و 35 .

أولا : مدلول القيمة 53 من منظور احتمال شرطي :

هناك حالتين :

- حالة النظرة السطرية : $P(A/\overline{D})=\frac{53}{88}=0,602\approx 0,6$
- حالة النظرة العمودية $P(\overline{D}/A)=\frac{53}{60}=0,883\approx 0,88$

ثانيا : مدلول القيمة 35 من منظور احتمال شرطي :

هناك حالتين :

- حالة النظرة السطرية : $P(B/\overline{D})=\frac{35}{88}=0,3977\approx 0,4$
- حالة النظرة العمودية $P(\overline{D}/B)=\frac{35}{40}=0,875\approx 0,88$

الخلاصة

يجب عدم الخلط بين المدلولات التالية : $P(A\cap D)$ و $P(A/D)$ و $P(D/A)$

:

لقد رأينا ان القيم الاحتمالية من خلال قراءة الجدول انها مختلفة بالفعل كانت كما يلي :

$$P(A/D)=\frac{7}{12}\neq P(D/A)=\frac{7}{60}\neq P(A\cap D)=\frac{7}{100}$$

لاحظ معي ايضا ان :

$$P(A\cup D)=P(A)+P(D)-P(A\cap D)\ =\ 0,6\ +0,12\ -\ 0,07\ =0,65$$

بالفعل هذا ما يمكن الوقوف عليه من خلال مخطط فيان :

$P(A \cup D) = \frac{53 + 7 + 5}{100} = \frac{65}{100} = 0{,}65$