Exercice 1. *A number is randomly chosen from the integers* $1, 2, \ldots, n$*, with all choices being equally likely. Let* k *be a nonzero integer such that* $k \leq n$*. Define the event* A_k *as : "the chosen number is divisible by* k*".*

1. Compute $P(A_k)$ *when* k *divides* n*.*

2. Show that if $k_1, k_2, \ldots, k_j$ *are distinct prime divisors of* n*, then the events* $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_j}$ *are independent.*

* The random experiment is "randomly choosing a number among the integers $1, 2, ..., n$."

* $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$

* Ω is a finite set since $card(\Omega) = n$. Therefore, we take the σ-algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ and obtain the probability space $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

* Since all choices are equally likely, the elementary events are equiprobable, meaning that $\forall \omega \in \Omega$, we have :

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{n}.$$

In this case, the probability measure P on $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ is the uniform probability, i.e., $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{n}.$$

1- Computation of $P(A_k)$ when k divides n

If k divides n, there exists a unique integer $m \in \mathbb{N}^*$ such that $n = mk$. The event A_k corresponds to numbers divisible by k, i.e. :

$$A_k = \{\alpha k \mid \alpha \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^*\} = \{k, 2k, 3k, ..., mk\}.$$

The number of favorable cases is $card(A_k) = m$, thus :

$$P(A_k) = \frac{card(A_k)}{n} = \frac{m}{mk} = \frac{1}{k}.$$

2- Independence of the events $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_j}$

If $k_1, k_2, ..., k_j$ are distinct prime divisors of n, we must show that for any subset S of $\{k_1, k_2, \ldots, k_j\}$, we have :

$$P\left(\bigcap_{k \in S} A_k\right) = \prod_{k \in S} P(A_k).$$

Since $k_1, k_2, ..., k_j$ are distinct prime divisors of n, for any integers $i_1, i_2, ..., i_r \in \{1, 2, ..., j\}$, the events $A_{k_{i_1}}, A_{k_{i_2}}, \ldots, A_{k_{i_r}}$ must be independent.

If $k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_r}$ are distinct prime numbers and n is an integer, we have :

$$(k_{i_1} \text{ divides } n, k_{i_2} \text{ divides } n, \ldots, k_{i_r} \text{ divides } n) \Leftrightarrow (k_{i_1} k_{i_2} \ldots k_{i_r} \text{ divides } n),$$

which implies that :

$$A_{k_{i_1}} \cap A_{k_{i_2}} \cap \cdots \cap A_{k_{i_r}} = A_{k_{i_1} k_{i_2} \ldots k_{i_r}}.$$

Therefore :

$$P\left(A_{k_{i_1} k_{i_2} \ldots k_{i_r}}\right) = \frac{1}{k_{i_1} k_{i_2} \ldots k_{i_r}} = P\left(A_{k_{i_1}}\right) P\left(A_{k_{i_2}}\right) \ldots P\left(A_{k_{i_r}}\right).$$

Thus, the events $A_{k_{i_1}}, A_{k_{i_2}}, \ldots, A_{k_{i_r}}$ are independent, which implies that $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_j}$ are independent.

Exercice 2. *On choisit au hasard un des nombres entiers* $1, 2, ..., n$, *tous les choix étant équiprobables. Soit* k *un entier non nul,* $k \leq n$. *Soit* A_k *l'évènement : "le nombre choisi est divisible par* k*". 1. Calculer* $P(A_k)$ *lorsque* k *divise* n.

2. Montrer que si $k_1, k_2, ..., k_j$ *sont des diviseurs premiers de* n *distincts, les évènements* $A_{k_1}, A_{k_2}, ..., A_{k_j}$ *sont indépendants.*

* L'expérince aléatoire est "choisir au hasard un nombre parmi les entiers $1, 2, ..., n$"
* $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$
* Ω est un ensemble fini car $card(\Omega) = n$ alors on prend la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on obtient l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

* Tous les choix étant équiprobables= les évènements élémentaires sont équiprobables c'est à dire $\forall \omega \in \Omega \; P(\{\omega\}) = \frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{n}$, et dans ce cas la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est la probabilité uniforme c à d $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\,,\; P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{n}$

1- Calcul de $P(A_k)$ lorsque k divise n

Si k divise n il existe un entier m unique de $\mathbb{N}^*$ tel que $n = mk$. L'événement A_k correspond aux nombres divisibles par k, soit : $A_k = \{\alpha k, \alpha \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^*\} = \{k, 2k, 3k, ..., mk\}$

le nombre de cas favorables est : $card\,(A) = m$ donc

$$P\left(A_k\right) = \frac{card\left(A_k\right)}{n} = \frac{m}{mk} = \frac{1}{k}$$

2. **Indépendance des événements** $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_j}$ Si $k_1, k_2, ..., k_j$ sont des diviseurs premiers de n distincts

Nous devons montrer que pour tout sous-ensemble S de $\{k_1, k_2, \ldots, k_j\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{k \in S} A_k\right) = \prod_{k \in S} P(A_k).$$

Si $k_1, k_2, ..., k_j$ sont des diviseurs premiers de n distincts, il faut montrer que pour tous les entiers $i_1, i_2, ..., i_r \in \{1, 2, ..., j\}$, les évènements $A_{k_{i_1}}, A_{k_{i_2}}, \ldots, A_{k_{i_r}}$ sont indépendants.

Si $k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_r}$ sont des entiers premiers distincts et n un entier on a :

(k_{i_1} divise n et k_{i_2} divise $n, \ldots,$et k_{i_r} divise n)$\Leftrightarrow$($k_{i_1}k_{i_2}\ldots k_{i_r}$ divise n) donc $A_{k_{i_1}} \cap A_{k_{i_2}} \cap \cdots \cap A_{k_{i_r}} = A_{k_{i_1}k_{i_2}\ldots k_{i_r}}$

Alors $P\left(A_{k_{i_1}k_{i_2}\ldots k_{i_r}}\right) = \frac{1}{k_{i_1}k_{i_2}\ldots k_{i_r}} = P\left(A_{k_{i_1}}\right) P\left(A_{k_{i_2}}\right) \ldots P\left(A_{k_{i_r}}\right)$. Donc les évènements $A_{k_{i_1}}, A_{k_{i_2}}, \ldots, A_{k_{i_r}}$ sont indépendants

Alors $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_j}$ sont indépendants.