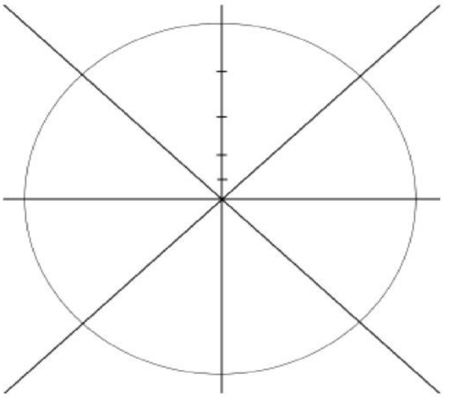
I.6. Symétrie d'orientation

Jusqu'à présent, la seule opération de répétition que nous avons utilisée de manière formelle est la translation de réseau : l'application de trois translations non coplanaires sur un point, qui génère un réseau spatial. Cependant, en plus des translations de réseau, il existe d'autres opérations de répétition, telles que les rotations et les réflexions. Dans ces cas, un objet est amené à coïncider avec lui-même par une rotation autour d'un axe ou une réflexion dans un plan.

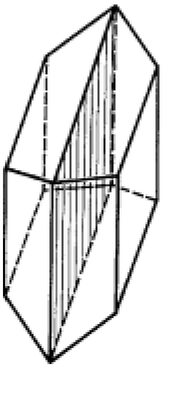
Toutes ces opérations de répétition sont appelées opérations de symétrie. La symétrie consiste en la répétition d'un motif selon des règles spécifiques.

Prenons l'exemple d'une roue : les rayons se répètent tous les 45°, ou encore, lorsque la roue tourne, elle coïncide avec elle-même après chaque rotation de 45°.

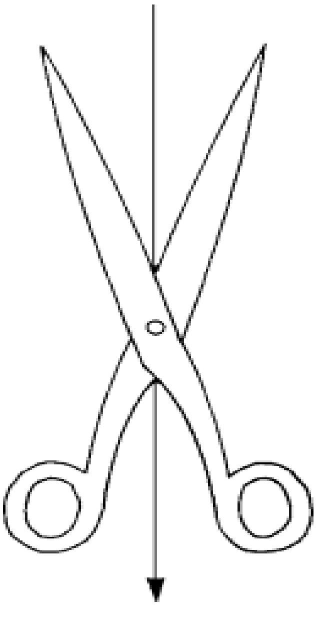


Lorsqu'une opération de symétrie possède un lieu géométrique (un point, une ligne ou un plan) qui reste inchangé par cette opération, ce lieu est appelé élément de symétrie.

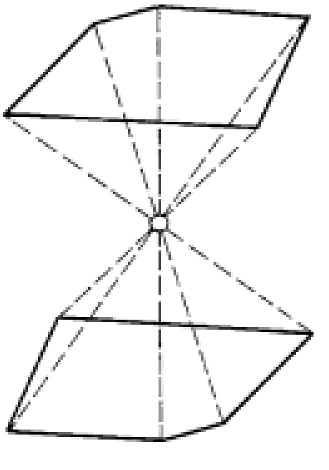
Prenons l'exemple d'un cristal de gypse. La moitié droite du cristal peut coïncider avec la moitié gauche par une réflexion dans le plan hachuré, et inversement. Chaque point du cristal est déplacé par cette opération de réflexion, sauf ceux qui se trouvent directement sur le plan de réflexion. Ce plan, qui contient ces points invariants, est l'élément de symétrie associé à l'opération de réflexion ; on l'appelle plan miroir.



Une rotation de 180° autour de l'axe marqué par une flèche permet de faire coïncider une moitié d'une paire de ciseaux avec l'autre moitié. De même, une rotation de 180° de la paire de ciseaux la ramène à coïncider avec elle-même. Pendant cette opération, tous les points des ciseaux se déplacent, sauf ceux situés sur l'axe de rotation (la flèche). Ces points invariants forment l'élément de symétrie correspondant à l'opération de rotation : l'axe de rotation.

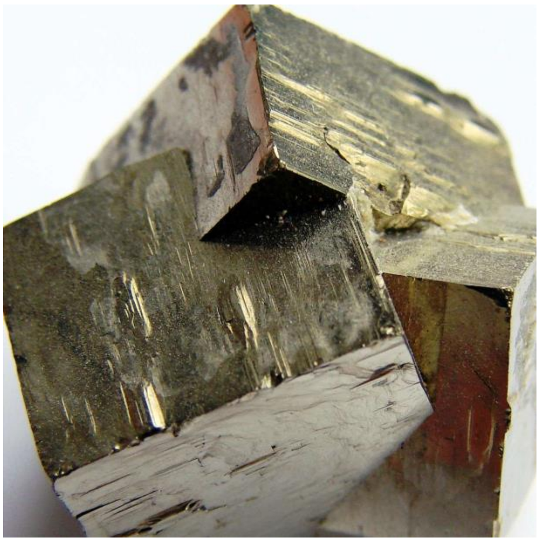


Un autre type de symétrie est illustré par une paire de pentagones irréguliers. La réflexion de l'un des pentagones par rapport au point indiqué le fait coïncider avec l'autre pentagone. Cette opération de symétrie, appelée inversion, laisse un seul point inchangé : ce point est l'élément de symétrie de l'opération d'inversion et est appelé centre d'inversion ou centre de symétrie.



I.6.1. Opérations de symétrie

Une opération de symétrie est définie par un support géométrique appelé élément de symétrie, qui représente l'ensemble des points invariants lors de l'application de cette opération. Ces opérations sont des isométries, c'est-à-dire des transformations de l'espace qui conservent les distances, et elles laissent au moins un point inchangé.

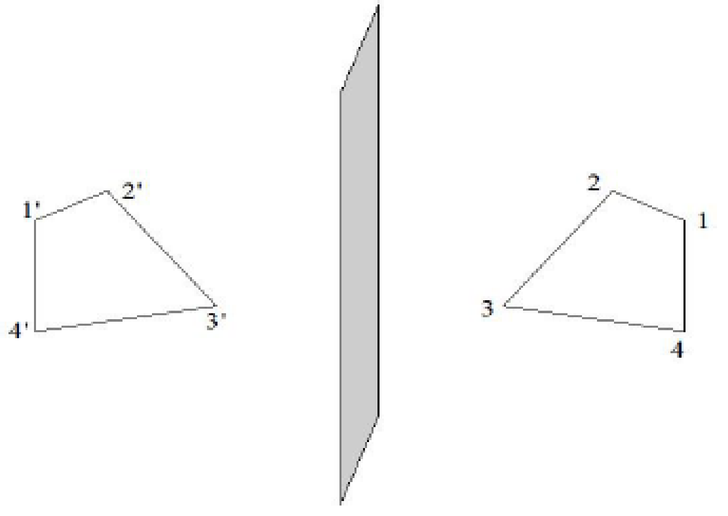


I.6.1.1. Identité

L'identité est l'opération la plus simple, qui transforme tout point en lui-même. C'est la seule transformation capable de superposer un objet asymétrique sur lui-même. Il s'agit d'une opération sans effet apparent. Tout point R dans l'espace a pour image lui-même. Tout objet reste invariant par l'application de l'identité.

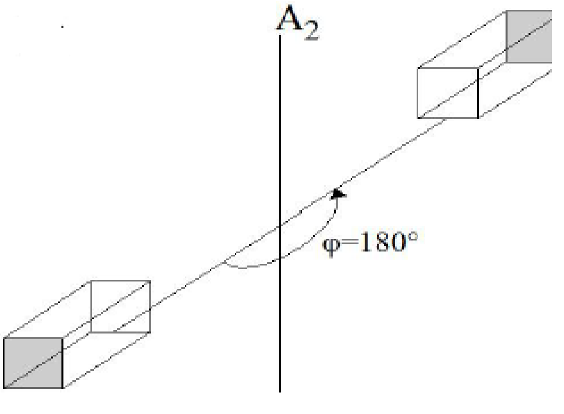
I.6.1.2. Réflexion

La réflexion, notée m, est un cas particulier de roto-inversion impliquant une rotation d'angle π suivie d'une inversion. Cette transformation s'effectue par rapport à un plan miroir. Tout point R de l'espace a pour image un point R', symétrique par rapport au plan miroir. La distance entre R et le plan miroir est égale à celle entre R' et ce même plan, et la droite reliant R à R' est perpendiculaire au plan miroir.



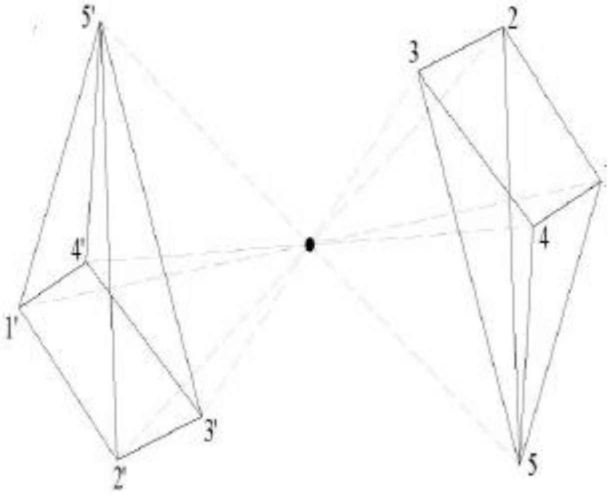
I.6.1.3. Rotation

Les rotations sont caractérisées par un axe de rotation et un angle de rotation φ (exprimé en degrés). La rotation s'effectue dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) autour de l'axe. Tout point R de l'espace est transformé en un point R', obtenu par une rotation d'angle φ autour de l'axe.



I.6.1.4. Inversion

L'inversion est une opération qui transforme un point en son symétrique par rapport à un centre d'inversion, généralement situé à l'origine O. Si un point R a pour coordonnées (x, y, z), son image R' aura pour coordonnées (-x, -y, -z). Cette opération s'effectue par rapport à un point central appelé centre d'inversion.



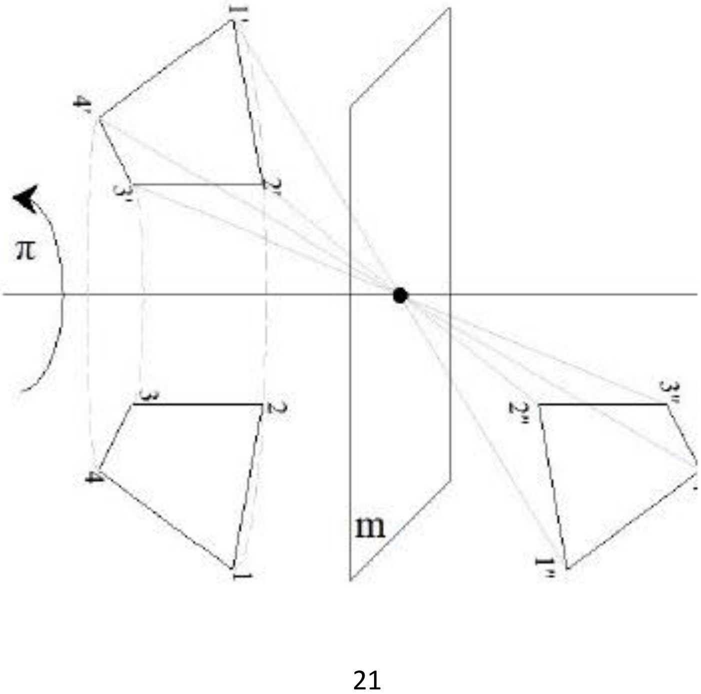
I.6.1.5. Roto-inversion

La roto-inversion est une combinaison d'une rotation d'angle φ autour d'un axe et d'une inversion. Elle n'est ni une rotation pure ni une inversion pure, mais une composition des deux. L'ordre d'un axe de roto-inversion dépend de l'angle de rotation $2\pi/n$:

- Si n est pair, l'ordre de l'axe est n.
- Si n est impair, l'ordre de l'axe est 2n.

L'ordre d'une roto-inversion correspond à l'ordre de la rotation associée. Parmi les cas particuliers :

- La roto-inversion d'ordre 1 est équivalente à une inversion (rotation de 360° suivie d'une inversion).
- La roto-inversion d'ordre 2 est équivalente à une réflexion par rapport à un plan miroir perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par le centre d'inversion.



I.6.2. Représentation de la symétrie

Dans un cristal, un élément de symétrie est représenté selon sa direction. Par exemple, un axe de rotation est parallèle à la direction de symétrie, tandis qu'un plan miroir lui est perpendiculaire. Dans un cristal, les faces, les arêtes et les sommets se répètent par rotation autour d'un axe. Le sens positif d'une rotation est le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre), tandis que le sens anti-trigonométrique (identique aux aiguilles d'une montre) est considéré comme négatif.

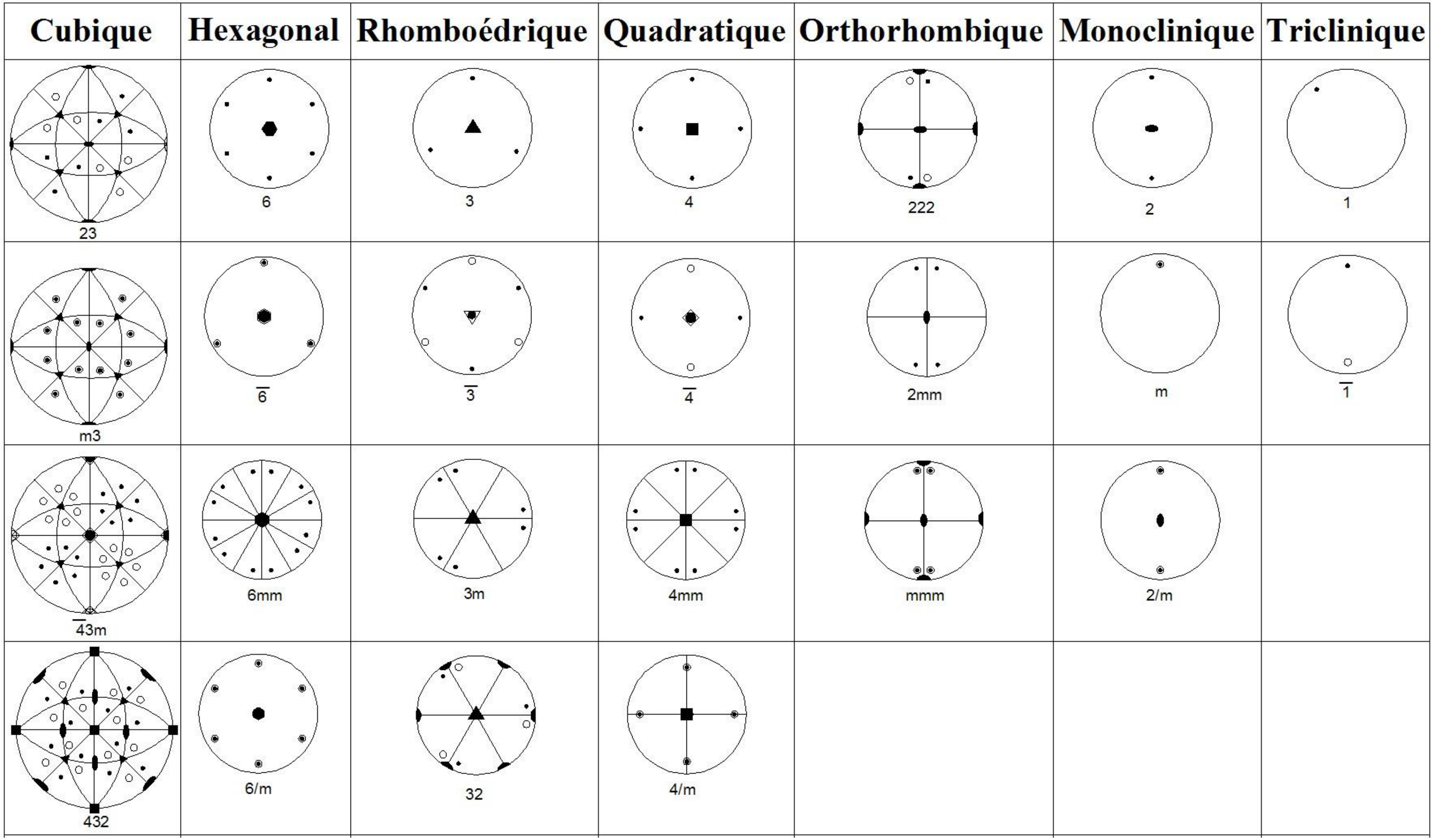
I.7. Les 32 classes de symétrie

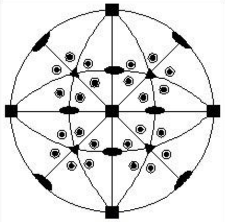
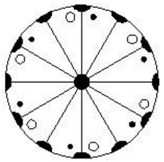
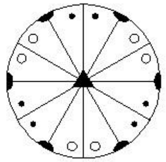
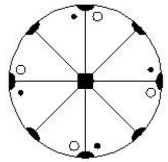
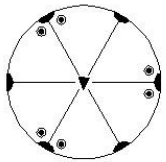
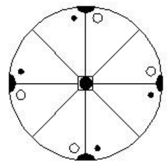
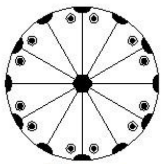
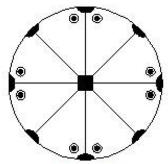
Les combinaisons entre les éléments de symétrie (plans miroirs, axes de rotation et centres de symétrie) donnent lieu à 32 classes de symétrie distinctes, représentées selon la convention d'Hermann-Mauguin. Ces 32 classes, également appelées groupes ponctuels de symétrie, agissent sur les directions spatiales et sont classées en fonction des sept systèmes cristallins. Un tableau récapitulatif illustre cette classification.

Système cristallin	Classes de symétrie
Cubique	23 m3 $\bar{4}$3m 432 m3m
Hexagonal	6 $\bar{6}$ 6mm 6/m 622 $\bar{6}$2m 6/mmm
Rhomboédrique (Trigonal)	3 $\bar{3}$ 3m 32 $\bar{3}$m
Quadratique (Tétragonal)	4 $\bar{4}$ 4mm 4/m 422 $\bar{4}$2m 4/mmm
Orthorhombique	222 2mm mmm
Monoclinique	2 m 2/m
Triclinique	1 $\bar{1}$

Les groupes ponctuels sont formés par la combinaison des cinq rotations (d'ordre 1, 2, 3, 4 et 6) et des quatre roto-inversions ($\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ et $\bar{4}$), à l'exception de $\bar{6}$, qui correspond à l'ensemble des opérations de rotation d'ordre 3 et d'un plan miroir perpendiculaire à cet axe (noté 3/m). Ces combinaisons permettent de construire les 32 groupes ponctuels de symétrie.

Une représentation graphique détaillée de ces 32 groupes ponctuels est fournie pour en visualiser les caractéristiques.


Cubique
Hexagonal
Rhomboédrique
Quadratique
Orthorhombique
Monoclinique
Triclinique
23
6
3
4
222
2
1
m3
$\bar{6}$
$\bar{3}$
$\bar{4}$
2mm
m
$\bar{1}$
$\bar{4}3m$
6mm
3m
4mm
mmm
2/m
432
6/m
32
4/m

Cubique	Hexagonal	Rhomboédrique	Quadratique	Orthorhombique	Monoclinique	Triclinique
 m3m	 622	 $\bar{3}$m	 422			
	 $\bar{6}$2m		 $\bar{4}$2m			
	 6/mmm		 4/mmm			