

Série N°06 : Estimation paramétrique et intervalle de confiance

Exercice 01 : (Gaz nocif)

Dans l'atmosphère, le taux d'un gaz nocif, pour un volume donné, X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 . On effectue n prélèvements (réalisations) aux valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .

(a) Si on sait que $\sigma^2 = 100$. Sur $n = 10$, on a le tableau suivant :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
40	45	50	41	51	52	35	48	46	52

1. Trouver l'estimation $\hat{\mu}$ de maximum de vraisemblance (MV) du paramètre μ .
2. Donner un intervalle de confiance de μ au risque $\alpha = 0.05$.
3. Même 2^{ème} question mais $\alpha = 0.01$.

(b) Si on ne connaît pas σ^2 . Sur un échantillon de taille $n = 50$, on a trouvé la moyenne $\bar{x} = 51$ et la variance $s^2 = 100$:

1. Donner un intervalle de confiance de μ au risque $\alpha = 0.05$.
2. Même question avec $\alpha = 0.01$.

Exercice 02 : (temps de réponse d'un serveur)

Une entreprise informatique surveille les temps de réponse (en millisecondes) de son serveur pour les requêtes d'utilisateur. On suppose que le temps de réponse X suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Sur un échantillon de 10 requêtes, On a trouvé les données suivantes :

120, 125, 130, 128, 122, 135, 140, 118, 132, 129.

1. Déterminer la population et la variable étudiées, et la taille de l'échantillon.
2. Trouver $\hat{\mu}$ l'estimation du MV du temps moyen de réponse μ .
3. Trouver $\hat{\sigma}^2$ l'estimation du MV de la variance σ^2 .
4. Donner un intervalle de confiance de μ au risque $\alpha = 0.05$.

Exercice 03 : (nombre de pannes d'un réseau)

Une entreprise analyse le nombre de pannes journalières sur son réseau informatique. On suppose que le nombre de pannes journalières X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Sur un échantillon de 07 jours, On a trouvé les données suivantes :

2, 3, 1, 4, 0, 2, 3.

1. Trouver $\hat{\mu}$ l'estimation du MV du nombre moyen de pannes journalières.

2. Déduire $\widehat{\sigma^2}$ l'estimation du MV de la variance σ^2 de X .

3. Donner un intervalle de confiance de μ au risque $\alpha = 0.01$.

Exercice 04 ★ : Fabricant de tissu

Un fabricant de tissu essaye une nouvelle machine. Il fabrique des échantillons de 10 mètres et compte le nombre de défauts par échantillon. Ayant examiné 126 échantillons, il a trouvé les résultats suivants :

nombre de défauts	0	1	2	3	4
Nombre d'échantillon	44	49	24	7	2

1. Donner l'estimation $\widehat{\mu}$ du maximum de vraisemblance du nombre moyen de défauts μ .

2. Donner l'estimation $\widehat{\sigma^2}$ du maximum de vraisemblance de la variance σ^2 .

3. Donner un intervalle à 99% de confiance pour cette moyenne.

Exercice 05 : (proportion p) On veut estimer la probabilité de la face "pile" d'une pièce de monnaie. On lance la pièce 100 fois, et on obtient les résultats suivants :

Résultat de jet	Effectif
P	65
F	35

(1) Déduire l'estimation \widehat{p} du MV de la probabilité d'occurrence de la face "pile", notée p .

(2) Donner un intervalle de confiance de p pour $\alpha = 0.05$.