Université de L'arbi Ben M'hidi - Oum El Bouaghi
Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie
Département de Mathématiques et Informatiques

Licence informatique 3$^{\text{ième}}$ année, S5

Spécialité : Systèmes Informatiques SI

Probabilités et Statistique

L'enseignante :

Besma Bennour

2024-2025

Table des matières

Chapitre 1

Espaces probabilisés

1.1 Expérience aléatoire, ensemble des épreuves

Exemple 1 : On lance deux pièces de monnaie différentes et bien équilibrées sur une surface plane. On registre ce qu'on voit sur la face de chacune des deux pièces.
On pose F pour face et P pour pile.
Exemple 2 : On lance deux dés différents et bien équilibrés, un rouge et un vert.
On enregistre les deux chiffres qui apparaissent sur les deux faces supérieures des dés.
Exemple 3 : On jette un dé à 6 faces plusieurs fois, et on s'arrête lorsque l'on a obtenu un 6. On s'intéresse au nombre de lancer.
Exemple 4 : On tire au hasard (simulténément) trois boules d'une urne qui contient 10 boules numérotés de 0 à 9.
Exemple 5 : On tire successivement trois boules d'une urne qui contient 10 boules numérotés de 0 à 9.
Exemple 6 : J'attends le bus, et je m'intéresse au temps aléatoire qu'il va mettre à arriver, sachant que ça ne peut pas être plus de 10 minutes.

Pour étudier ces phénomènes (expérience) aléatoire, il faut le modéliser par un modèle probabiliste. Les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appellent **les épreuves** ou **les réalisations** de l'expérience. On représente les épreuves par la lettre minuscule ω, comme $\omega, \omega_1, ..., \omega_i, ...$

Définition 1.1. *On appelle **ensemble des épreuves** (résultats) ou **l'univers**, noté Ω, l'ensemble décrivant tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.*

Exemple 1 suit : $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$ espace fini où $card(\Omega) = 4$.

Exemple 2 suit : $\Omega = \{(i,j), 1 \leq i \leq 6 et 1 \leq j \leq 6\}$ espace fini tel que $card(\Omega) = 36$.

Exemple 3 suit : $\Omega = \{1, 2, ..., n, ...\} = \mathbb{N}^*$ espace dénombrable tel que :
n "on obtient 6 au n-ième lancer".

Exemple 4 : $card(\Omega) = C_{10}^3$, telle que $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$ est une combinaison.

Exemple 5 : $card(\Omega) = A_{10}^3$, tel que $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ est un arrangement.

Exemple 6 suit : $\Omega = [0, 10]$ espace infini.

Exemple 7 : On a $N = 10000$ pièces dont m sont défectueuses. On prend n pièces tel que $m < n$. Soit Ω_i, $i = 1, ..., 4$, l'ensemble des résultats possibles.
Cas 1 : On tire les n pièces sans tenir compte de l'ordre. donc : $\Omega_1 = C_N^n$.
Cas 2 : On les tire en tenant compte de l'ordre, donc $\Omega_2 = A_N^n$.
Cas 3 : On tire toutes les pièces en tenant compte de l'ordre, donc $\Omega = N!$.
Cas 4 : On ne s'intéresse qu'un nombre de pièces défectueuses tirées. Donc $\Omega_4 = \{0, 1, ..., m\}$.

1.2 Événement

soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les sous-ensemble de Ω, incluant l'ensemble Ω lui-même et l'ensemble vide.

Exemple 8 : Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$ un ensemble fini.
$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega\}$.

Tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelé **un événement**. On peut donc interpréter chaque événement avec un sous-ensemble de Ω. On représente les événements par des lettres majuscules comme $A, B, C, E, ...$

1.2.1 Types d'événements

1. **Événement élémentaire**
   L'événement qui est réalisable par une seule épreuve s'appelle événement élémentaire et correspond au singleton (le sous-ensemble comportant un seul élément).

2. **Événement composé**

   L'événement qui est réalisable par plusieurs épreuves s'appelle **événement composé** et le sous-ensemble correspond comportant plusieurs éléments.

3. **Événement certain**

   L'événement qui se réalise à chacune des épreuves, nommé **l'événement certain**, et correspond à l'ensemble de toutes les épreuves possibles de l'expérience Ω.

4. **Événement impossible**

   L'événement qui ne peut être réalisé par aucune épreuve, nommé **l'événement impossible**, et correspond à l'ensemble vide $\emptyset$.

5. **Événement contraire** à A, noté A^c ou $\overline{A}$, est l'événement qui se réalise si et seulement si A ne se réalise pas.

   On remarque que $(A^c)^c = A$. Les sous-ensembles des épreuves rattachées aux événements A et $\overline{A}$ sont complémentaires par rapport à l'ensemble Ω (c'est-à-dire $A \cup \overline{A} = \Omega$).

Exemple 1 suit : On a $\Omega = \{PP, FF, PF, FP\}$. Soit A un événement "obtenir deux piles" donc A se réalise si On obtient l'épreuve PP. On peut écrire alors $A = \{PP\}$ et on dit que A est un événement élémentaire. L'événement $\overline{A}$ est "obtenir au moins une face", donc $\overline{A} = \{FF, PF, FP\}$ est un évènement composé. Soit B l'événement "obtenir trois face", donc $B = \varnothing$. Soit C l'événement "obtenir au plus deux faces", donc $C = \Omega$.

1.2.2 Relations entre les événements

1. **Équivalence des événements**

   On appelle *événements équivalents*, des événements qui se réalisent simultanément. L'équivalence de deux événements A et B revient à l'égalité des sous-ensembles des épreuves $A = B$.

2. **L'implication des événements**

   On dit que l'événement A implique l'événement B si la réalisation de A entraîne nécessairement la réalisation de B. Donc $A \Rightarrow B$ c'est-à-dire dans le contexte ensembliste $A \subseteq B$.

Remarque 1.1. — Tout événement A implique l'événement certain puisque $A \subseteq \Omega$.

— Un événement élémentaire est impliqué seulement soit par lui-même ($A \subseteq A$), soit par l'événement impossible.

— L'événement impossible implique tout événement quelconque ($\varnothing \subseteq A$).

1.2.3 Opérations sur les événements

Dans $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de tous les événements reliés à une expérience, on peut introduire plusieurs opérations.

1. **Réunion d'événements**

   Étant donnés deux événements A et B, leur réunion est l'événement qui se réalise ssi au moins un des événements A **ou** B se réalise. On écrit $A \cup B$ et on lit "A ou B" ou encore "A réunion B".

2. **Intersection d'événements**

   Étant donnés deux événements A et B, leur intersection est l'événement qui se réalise si et seulement si au moins un des événements A **et** B se réalise. On écrit $A \cap B$ et on lit "A et B" ou encore "A inter B".

   Remarque 1.2. Deux événements A et B sont incompatible ou disjoints si $A \cap B = \varnothing$. Dans le cas contraire si $A \cap B \neq \varnothing$, on dit que les événements sont compatibles.

   Partition (système complet) Des événements $A_1, ..., A_n$ forment une partition s'ils sont deux à deux incompatibles et qu'il y a toujours l'un d'entre eux qui se réalise. Autrement dit, les conditions suivantes sont satisfaits :

   — $A_i \neq \emptyset, \ \ \forall i = 1, ..., n$

   — $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$ c'est-à-dire A_i et A_j sont disjoints deux à deux.

   — $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

3. **Différence d'événements**

   Étant donnés deux événements A et B, leur différence est l'événement qui se réalise chaque fois que conjointement A se réalise et que B ne se réalise pas. On écrit $A - B$ et on lit "A moins B".

$$A - B = A \cap \overline{B} \ \ et \ \ \overline{B} = \Omega - B$$

Les opérations entre les événements reviennent aux opérations respectives entre les ensembles des épreuves correspondantes, et donc les résultats des opérations entre les événements sont encore des événements reliés à la même expérience.

Conclusion 1 : Quand on manipule les événements deux types de vocabulaire coexistent : l'un est probabiliste, l'autre est ensembliste. Le tableau suivant indique la correspondance entre les deux terminologies :

Notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
ω	élément de Ω	épreuve, réalisation, éventualité, ou résultat possible
Ω	ensemble plein	événement certain
$\varnothing$	ensemble vide	événement impossible
A	sous-ensemble ou partie de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	l'épreuve ω réalise l'événement A
$A^c, \overline{A}$	complémentaire de A	contraire de A
$A \cap B$	A inter B	A et B
$A \cup B$	A union B	A ou B
$A - B$	A moins B	A se réalise et non B
$A \cap B = \varnothing$	A et B disjoints	A et B incompatibles
$A \subseteq B$	A inclus dans B	l'évènement A entraîne l'événement B A implique B
$A = B$	A est égal B	A entraîne B et B entraîne A A équivalent B

1.3 Probabilité d'un événement

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable.

Définition 1.2. *On appelle probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *une application* P *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *dans l'intervalle* $[0,1]$ *telle que :*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. *Pour toute suite d'évènements* $(A_i)_{n\geq 1}$ *deux à deux disjoints, on a*

$$P\Big(\cup_n A_i\Big) = \sum_n P(A_i)$$

.

Le triple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé **espace de probabilité ou espace probabilisé.**

Proposition 1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *un espace de probabilités. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. *Si* $A \cap B = \varnothing$, *alors* $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$
6. $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Proposition 1.2. *Soit* $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une suite d'événements qui constituent une partition de* Ω. *Alors pour tout* $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, *on a :*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

faire un diagramme correspondant.

Cas particulier : Pour tous événements A et B on a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$, car l'ensemble $\{A, \overline{A}\}$ forme une partition de Ω.

Exemple 9 : Un sac contient des billes noires et rouges, portant une marque ou non. La probabilité d'observer une bille rouge et marquée est de 2/10, une bille marqué de 3/10 et une bille noire de 7/10.

1) Quelle est la probabilité d'observer une bille rouge ou marquée ?
2) Quelle est la probabilité d'observer une bille rouge et non marquée ?
3) Quelle est la probabilité d'observer une bille noire et non marquée ?

Solution : Soit N l'évènement "obtenir une billet noire", donc $P(N) = 7/10$.
M l'évènement "obtenir une billet marquée", donc $P(M) = 7/10$.
R l'évènement "obtenir une billet rouge", donc $P(R \cap M) = 2/10$.
1) $P(R \cup M) = P(R) + P(M) - P(R \cap M) = \big(1 - P(N)\big) + P(M) - P(R \cap M) = 4/10$.
2)$P(R \cap \overline{M}) = P(R - M) = P(R) - P(R \cap M) = (1 - \dfrac{7}{10}) - \dfrac{2}{10} = ...$
3)$P(N \cap \overline{M}) =??$
On a $P(N \cap \overline{M}) = P(N - M) = P(N) - P(N \cap M)$,
on cherche $P(N \cap M)$, donc on remarqur que l'ensemble $\{N, R\}$ forme une partition de Ω alors :
$P(M) = P(M \cap N) + P(M \cap R) \Longrightarrow P(M \cap N) = P(M) - P(M \cap R) = \dfrac{7}{10} - \dfrac{2}{10} = ...$

Exemple 10 : Lors d'une loterie, 300 billets sont vendus aux personnes. 5 billets sont gagnants. une personne achète 10 billets. Quelle est la probabilité pour que la personne gagne au moins un lot ?.

Solution : On a $\Omega = C_{300}^{10}$. Soit G l'évènement "la personne gagne au moins un lot".
$\overline{G}$ l'évènement "la personne ne gagne rien", donc
$P(\overline{G}) = \dfrac{card\overline{G}}{card^{O}mega} = \dfrac{C_{295}^{10}}{C_{300}^{10}}$. Alors $P(G) = 1 - P(\overline{G})$.

Exemple 11 : Un étudiant a les probabilités suivantes d'avoir la note i à un module, le module étant noté sur 10. Quelle est la probabilité que "l'étudiant valide son module" ?.

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Proba	1/11	0	0	1/11	1/11	2/11	2/11	2/11	1/11	1/11	0

Solution : On note V l'événement "l'étudiant valide son module", et A_i l'événement "l'étudiant obtient la note i". A_i forment une partition de l'ensemble des notes possibles et l'on a donc : $P(V) = \sum_{i=0}^{10} P(V \cap A_i) = \sum_{i=5}^{10} P(A_i) = 8/11$.

1.4 Probabilité générale sur un ensemble fini

On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω compte n épreuves, tel que

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}\ ,\ \ et\ \ card(\Omega) = n.$$

La probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$, $i = 1, ..., n$, (notée p_i) est la fréquence d'apparition du résultat ω_i au cours d'un grand nombre de répétition de l'expérience. On écrit $P\Big(\{\omega_i\}\Big) = p_i$ et alors :

$$\begin{pmatrix} \textit{épreuve} & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ \textit{probabilité} & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}\ \ tel\ que\ :\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Soit $A = \cup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}$ un événement, alors

$$P(A) = P(\cup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i \tag{1.1}$$

Exemple 12 : On lance un dé **pipé**, où l'apparition de la face qui
porte 2 et 5 points est le double de l'apparition de la face qui porte un point
, l'apparition de la face 3 et 4 est le triple de l'apparition de la face une,
et l'apparition de la face 6 est un demi de l'apparition de la face une.
i.e si on pose $P(\{1\}) = p$, on trouve :

événement élémentaire	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
probabilité $P(\{i\})$	p	$2p$	$3p$	$3p$	$2p$	$\frac{p}{2}$

Déterminer les probabilité des événements élémentaires de cette expérience aléatoire.

On a $\Omega = \{1, ..., 6\}$, et $\sum_{i=1}^{n} P\Big(\{i\}\Big) = 1 \Longrightarrow p + 2(2p) + 2(3p) + \dfrac{p}{2} = 1 \Longrightarrow p = ...$ (calculer).

Soient l'évènement A "Obtenir un chiffre pair" et B "obtenir un chiffre plus grand que 4".

Calculer $P(A)$**,** $P(A^c)$**,** $P(B)$**, et** $P(A \cap B)$**.**

Exemple 13 : On lance deux dés équilibrés, et on note S la somme des deux dés.

L'ensemble des valeurs possibles pour S est $\Omega = \{2, 3, ..., 12\}$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Par exemple $P(S = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = 3/36$

Les probabilités pour les valeurs possibles de S sont alors :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = k)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Soient l'évènement A "au moins la somme de deux dés est égale à 7" et B "au plus la somme est égale à 4". Calculer $P(A)$, $P(A^c)$, $P(B)$, et $P(A \cap B)$.

1.4.1 Cas particulier : le cas équiprobabilité

On considère que toutes les épreuves ω_i sont **également vraisemblables**, c'est-à-dire :

$$P(\{\omega_i\}) = p_i = \frac{1}{n}\ , \quad \forall\, i = 1, ..., n \;\Leftrightarrow\; P(\{\omega_1\}) = ... = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}$$

On peut écrire donc :

$$\begin{pmatrix} \textit{épreuve} & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_n \\ & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ \textit{probabilité} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Soit $A = \cup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}$ un événement, alors la probabilité $P(A)$ est donnée par :

$$P(A) = P(\cup_{i:\omega_i \in A}\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{card(A)}{card(\Omega)} \tag{1.2}$$

Attention Cette définition classique ou fréquentiste de probabilité utilise seulement pour les expériences où les événements élémentaires sont **équiprobables**, c'est-à-dire également vraisemblable.

Les épreuves sont **équiprobables**, c'est-à-dire **les probabilités des événements élémentaires sont égales**.

Exemple (suit) On prend l'exemple 2 (deux dés non pipés). Donc $\Omega = \{(i,j), 1 \leq i,j \leq 6\}$, $card(\Omega) = 36$ et $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}\ \forall i,j$.

Soit l'évènement A "les valeurs des deux dés sont identiques". donc :

$A = \{(1,1), ..., (6,6)\}\ \ et\ \ P(A) = P\Big(\{(1,1), ..., (6,6)\}\Big) = \frac{6}{36}$

Calculer $P(B)$ tel que B l'évènement "le dé 1 donne le chiffre 2 et le dé 2 donne un chiffre impair".

$P(B) =$ ....

Chapitre 2

Variables aléatoires discrètes

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité et $E \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.1. *Une variable aléatoire (v.a) X est une application de Ω dans E, telle que l'inverse de chaque intervalle de E est un évènement de Ω.*

$$X : \Omega \to E$$

$$X^{-1}(I \subset E) = A \subset \Omega$$

2.1 Définitions, support d'une v.a.d

Définition 2.2. *Une v.a est dite discrète si elle peut prendre un nombre fini de valeurs isolées. l'ensemble E est égal à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou une partie de $\mathbb{Z}$.*

Le support d'une v.a est l'ensemble des ses valeurs possibles. On notera $\mathcal{S}(X)$ le support d'une v.a X.

Exemple 1 : On lance une pièce de monnaie une fois. X est le résultat d'obtenir le Pile. Donc X prend deux valeurs 0 ou 1. C'est-à-dire $X = 1$ si le résultat de lancer est Pile et $X = 0$ si non.
Exemple 2 : On lance un dé équilibré. X le résultat obtenu. Alors X est une v.a.d, et les valeurs possibles de X sont $\mathcal{S}(X) = \{1, 2, ..., 6\}$
Exemple 3 : On lance deux dés bien équilibrés, un vert et un rouge. Soit S le total (la somme) des faces supérieures. Donc S est une v.a.d, et le support de X est $\mathcal{S}(S) = \{2, 3, 4, ..., 12\}$.

Exemple 4 : On lance une pièce de monnaie $n = 3$ fois. Y représente le nombre de fois d'obtenir le Pile. Donc Y est une v.a.d et $\mathcal{S}(Y) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Exemple 5 : On jette un dé à 6 faces plusieurs fois, et on s'arrête lorsque l'on a obtenu un 6. Soit Y le nombre de lancer nécessaire. Alors Y est une v.a.d et $\mathcal{S}(Y) = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$.

2.2 Loi de probabilité d'une v.a.d

On s'intéresse maintenant à la loi de probabilité d'une v.a.d X, c'est-à-dire la probabilité $P(X = x_i)$ pour $x_i \in S(x) = \{x_1, ..., x_n\}$. Soit $A_{x_i} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$

Définition 2.3. *La loi de probabilité de X est*

$$P(X = x_i) = P(A_{x_i}) = p_i, \quad x_i \in \mathcal{S}(X) \tag{2.1}$$

Elle a deux propriétés suivantes :

(i) $P(X = x_i) \geq 0, \ \ x_i \in \mathcal{S}(X)$.

(ii) La probabilité totale $\sum\limits_{x_i \in \mathcal{S}(X)} P\Big(X = x_i\Big) = \sum\limits_{x_i \in \mathcal{S}(X)} p_i = 1$.

2.3 Fonction de masse d'une v.a.d

$$P_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \frac{1}{6} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & si \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & si \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & si \quad 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & si \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & si \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Exemple 1 (suit) : X le nombre de fois d'obtenir le Pile donc $\mathcal{S}(X) = \{0, 1\}$. La loi de probabilité de X est donnée par : $P(X = 1) = P(\{Pile\}) = p = \frac{1}{2}$

et $P(X = 0) = P(\{Face\}) = 1 - p$

On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p = \frac{1}{2}$ (i.e $X \sim \mathcal{B}(p)$).

Exemple 2 (suit) : X est le résultat d'un lancé de dé. On a $\mathcal{S}(X) = \{1, 2, ..., 6\}$.

$P\Big(X = 1\Big) = P\Big(A_{x=1}\Big) = P\Big(\{1\}\Big) = \frac{1}{6}$, et on trouve

x_i	1	2	3	4	5	6
$P\Big(X = x_i\Big)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On dit que X suit la **loi uniforme** de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (i.e $X \sim \mathcal{U}(p)$).

Exemple 3 (suit) : On a $\mathcal{S}(S) = \{2, 3, ..., 12\}$, donc la loi de probabilité de S est donnée dans le tableau suivant :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P\Big(S = s_i\Big)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Exemple 4 (suit) : Y est **le nombre** de fois d'obtenir le Pile, donc $\mathcal{S}(Y) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Pour chaque lancer, on a deux résultats Pile ou Face, et on s'intéresse par le Pile.

Donc on peut définir par X_i la v.a.d qui représente "le résultat de $\text{i}^{\text{ième}}$ lancer est le Pile".

C'est-à-dire $X_i = 1$ si le $\text{i}^{\text{ième}}$ lancer donne Pile et $X_i = 0$ si non.

On pose $P(X_i = 1) = p = \frac{1}{2}$, et on remarque que $X_i \sim \mathcal{B}(p = \frac{1}{2})$.

D'autre part Y est le nombre de fois d'obtenir le Pile, on peut donc écrire $Y = \sum_{i=1}^{3} X_i$

pour tout $k \in \mathcal{S}(Y)$, $P(Y = k) = P\Big(\sum_{i=1}^{3} X_i = k\Big) = C_3^k \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{3-k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \dfrac{C_3^k}{2^3}$

On trouve $P(Y = 0) = 0.125$, $P(Y = 1) = 0.375$, $P(Y = 2) = 0.375$, $P(Y = 3) = 0.125$

On dit que Y suit la **loi binomiale** de paramètre $n = 3$ et $p = \frac{1}{2}$ (i.e $Y \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$).

Question : vérifier la deuxième propriété de la loi de probabilité (i.e $\sum_{k=0}^{3} P(Y = k) = 1$).

Exemple 5 (suit) : On jette un dé à 6 faces plusieurs fois, et on s'arrête lorsque l'on a obtenu un 6. Soit Y le nombre de lancer nécessaire. On a $\mathcal{S}(Y) = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$.

La loi de Y est $P\Big(Y = k\Big) = (\frac{5}{6})^{k-1} \frac{1}{6}$ pour tout $k \in \mathcal{S}(Y)$

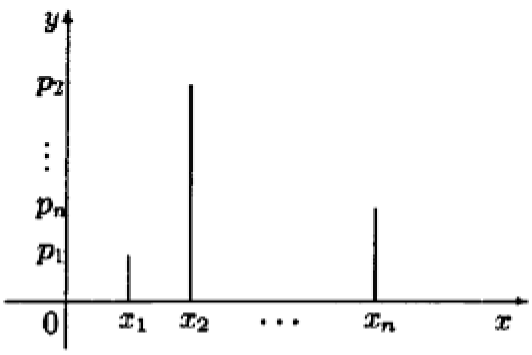
On dit que Y suit la **loi géométrique** de paramètre $p = \frac{1}{6}$ (i.e $Y \sim \mathcal{G}eo(p)$).

Explication de l'exemple 3 :

$$
\begin{aligned}
P\Big(S=2\Big) &= P\Big(A_{s=2}\Big) = P\Big(\{(1,1)\}\Big) = \frac{1}{36}\\
P\Big(S=3\Big) &= P\Big(A_{s=3}\Big) = P\Big(\{(1,2),(2,3\}\Big) = \frac{2}{36}\\
P\Big(S=4\Big) &= P\Big(A_{s=4}\Big) = P\Big(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}\Big) = \frac{3}{36}\\
P\Big(S=5\Big) &= P\Big(A_{s=5}\Big) = P\Big(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}\Big) = \frac{4}{36}\\
P\Big(S=6\Big) &= P\Big(A_{s=6}\Big) = P\Big(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\Big) = \frac{5}{36}\\
P\Big(S=7\Big) &= P\Big(A_{s=7}\Big) = P\Big(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}\Big) = \frac{6}{36}\\
P\Big(S=8\Big) &= P\Big(A_{s=8}\Big) = P\Big(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}\Big) = \frac{5}{36}\\
P\Big(S=9\Big) &= P\Big(A_{s=9}\Big) = P\Big(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}\Big) = \frac{4}{36}\\
P\Big(S=10\Big) &= P\Big(A_{s=10}\Big) = P\Big(\{(4,6),(5.5),(6,4)\}\Big) = \frac{3}{36}\\
P\Big(S=11\Big) &= P\Big(A_{s=11}\Big) = P\Big(\{(5,6),(6,5)\}\Big) = \frac{2}{36}\\
P\Big(S=12\Big) &= P\Big(A_{s=12}\Big) = P\Big(\{(6,6)\}\Big) = \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

2.4 Diagramme en bâton

La loi de probabilité d'une v.a.d X peut être représentée graphiquement par un **diagramme en bâton** comme dans la figure suivante



2.5 Fonction de répartition

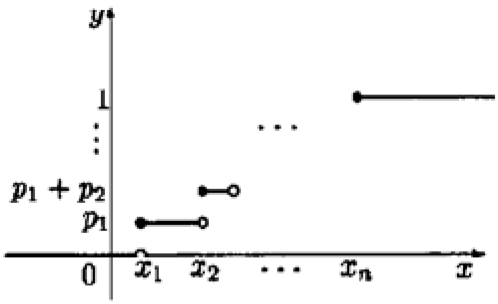
Définition 2.4. *La fonction de répartition d'une v.a.d X est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i \tag{2.2}$$

Autrement dit, $F_X(x)$ est la probabilité de l'évènement "la valeur de X est inférieure ou égale à x"

Remarque 2.1. 1) $F_X(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
2) F_X est une fonction croissante, c'est-à-dire si $x < y$, alors $F_X(x) < F_X(y)$;
3) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

Remarque 2.2. La fonction de répartition d'une v.a.d X peut être représentée graphiquement par une fonction **en escalier** comme dans la figure suivante



Exemple 1 (suit) : La fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Exemple 2 (suit) : La fonction de répartition de la v.a X :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \frac{1}{6} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & si \quad 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & si \quad 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & si \quad 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & si \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & si \quad x \geq 6 \end{cases}$$

Exemple 6 : Soit X une v.a, et soit :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 3 \\ \frac{1}{3} & si \quad 3 \leq x < 5 \\ \frac{2}{3} & si \quad 5 \leq x < 8 \\ 1 & si \quad x \geq 8 \end{cases}$$

sa fonction de répartition. Déterminer la loi de probabilité de la v.a X. Donc :

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On calcule $P(2 < X < 6) = F_X(6) - F_X(2) = \frac{2}{3}$

2.6 Espérance mathématique et variance d'une v.a.d

Il est utile d'associer à une v.a quelques nombres qui donneront des indications sur le comportement statistique de cette variable, en particulier sur sa valeur moyenne et sa dispersion autour de cette valeur moyenne.

Définition 2.5. *Si X est une v.a.d et $\mathcal{S}(X) = \{x_1, ..., x_n\}$ son support, on appelle espérance de X la quantité suivante lorsqu'elle existe :*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ P(X = x_i) \tag{2.3}$$

L'espérance d'une v.a positive est toujours définie (fini ou infini).

Propriétés de $E(X)$:

1. $E(a) = a$, où a est une constante.
2. Soient a, b deux nombres réels, et X, Y deux v.a.d. Si $E(X)$ et $E(Y)$ sont existent alors
$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$
3. $E(XY) = E(X) \ E(Y)$, si les v.a X et Y sont indépendantes.

Définition 2.6. *La variance d'une v.a X est*

$$Var(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{2.4}$$

La variance d'une v.a X peut s'interpréter comme une mesure de degré de dispersion des valeurs de la v.a X par rapport à son espérance.

Propriétés de $Var(X)$:

1. $Var(a) = 0$, où a est une constante.
2. $Var(X + b) = Var(X), \ \ pour\ tout\ b \in \mathbb{R}$.
3. $Var(aX) = a^2 X, \ \ pour\ tout\ a \in \mathbb{R}$.
4. $Var(aX + b) = a^2 Var(X), \ \ pour\ tout\ b \in \mathbb{R}$
5. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$;

Définition 2.7. *L'écart-type d'une v.a X est la racine carrée de sa variance.*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{2.5}$$

Question : Calculer l'espérance, la variance, et l'écart-type d'exemples précédents.

Exemple 1 (suit) : On a $\mathcal{S}(X) = \{0, 1\}$, où $P(X = 0) = 1/2$ et $P(X = 1) = 1/2$.
Donc $E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) = 1/2$
$Var(X) = 0^2.P(X = 0) + 1^2.P(X = 1) - E(X)^2 = 0.25$.

Exemple 2 (suit) : On a

x_i	1	2	3	4	5	6
$P\Big(X = x_i\Big)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_iP\Big(X = x_i\Big)$						
$x_i^2P\Big(X = x_i\Big)$						

Donc $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_iP\Big(X = x_i\Big) =$ ....
et $Var(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2P\Big(X = x_i\Big) - E(X)^2 =$ ....

Exemple 3 (suit) : On a

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P\Big(S = s_i\Big)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$s_iP\Big(S = s_i\Big)$											
$s_i^2P\Big(S = s_i\Big)$											

Donc $E(S) = \sum_{i=1}^{11} s_iP\Big(S = s_i\Big) =$ ....
et $Var(S) = \sum_{i=1}^{11} s_i^2P\Big(S = s_i\Big) - E(S)^2 =$ ....

2.7 Lois discrètes usuelles

Ensuite on traite quelques lois discrètes de probabilité, en particulier les deux lois les plus importantes, à savoir la loi binomiale et la loi de Poisson.

2.7.1 Loi uniforme

C'est la loi d'un tirage équiprobable sur un espace fini $\mathcal{S}(X)$. X prend toutes les valeur de $\mathcal{S}(X)$ avec la même probabilité, alors

$$P(X = x_i) = \frac{1}{card(\mathcal{S}(X))}, \quad pour\ tout\ x_i \in \mathcal{S}(X)$$

et on dit que X suit une loi uniforme sur $\mathcal{S}(X)$. comme **l'exemple 2**.

Question : On prend l'exemple 2. Rappeler $X, \mathcal{S}(X)$, loi de probabilité et son diagramme en bâton, F_X et sa courbe, $E(X)$, et $Var(X)$.

2.7.2 Loi de Bernoulli

On dit que la v.a X suit la loi de **Bernoulli** de paramètre p où $p \in [0,1]$, si :

$$P(X=1)=p\ , \qquad P(X=0)=1-p=q \tag{2.6}$$

On note $X \sim Bernoulli(p)$. revoir **l'exemple 1**.

1. La fonction de répartition :

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ \frac{1}{2} & si \quad 0\leq x<1 \\ 1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

- **L'espérance de X :**

$$E(x)=p.$$

- **La variance de X :** Comme $X^2=X$, $E(X^2)=p$; d'où :

$$Var(X)=p(1-p).$$

2.7.3 Loi binomiale (Tirage avec remise)

On suppose que l'on répète n fois dans des **conditions identiques** une expérience aléatoire, dont l'issue se traduit par l'apparition d'un évènement A de probabilité p, le résultat de chaque expérience étant indépendant des résultats précédents. Soit X le nombre d'apparition de l'évènement A parmi ces n expériences.
On dit alors que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
La deuxième définition de la loi binomiale : X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ si X est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

- **La loi de probabilité** de X est donnée par :

$$\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}\ , \quad P(X=k)=C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k} \tag{2.7}$$

- **La fonction de répartition :** est définie par

$$F_X(k)=P(X\leq k)=\sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \quad , \ k\in\{0,1,\ldots,n\}\,.$$

- **L'espérance de X :**

$$E(X)=np.$$

- **La variance de X :**

$$Var(X) = np(1-p).$$

revoir **l'exemple 4**.

2.7.4 Loi de Poisson

Une autre loi importante est la loi de Poisson.

Soit $\lambda > 0$. La variable aléatoire X est de loi de Poisson de paramètre λ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda). \tag{2.8}$$

- **L'espérance de X :**

$$E(X) = \lambda.$$

- **La variance de X :**

$$Var(X) = \lambda.$$

L'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Si $(n \to \infty)$ et $(p \to 0)$, la loi binomiale converge vers la loi de Poisson.

Cela signifie que si n est **grand** et p **petit** on peut approximer la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$. En pratique l'approximation est bonne si $n > 30$ et $np < 5$.

$$\mathcal{B}(n, p) \sim \mathcal{P}(\lambda = np).$$

Exemple 7 : Sur une autorote, il y a en moyenne deux accidents par semaine.
Quelle est la probabilité qu'il y aura cinq accidents par semaine ?
Soit X la v.a qui représente " le nombre d'accidents par une semaine", donc la loi de X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.
la probabilité qu'il y aura cinq accidents par semaine est :
$P(X = 5) = \dfrac{\lambda^5}{5!} \times e^{-\lambda} = ...$

2.7.5 Loi géométrique

On dit que la v.a X suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p et l'on note $X \sim \mathcal{G}eo(p)$ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1}\, p \tag{2.9}$$

- **Fonction de répartition de X**

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad F_X(k) = P(X \leq k) = 1 - (1-p)^k$$

- **L'espérance de X :**

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- **La variance de X :**

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

revoir **l'exemple 5**.

Typiquement la loi géométrique apparaît dans la situation suivante : on répète "indépendamment" une même expérience aléatoire et on note X le nombre de fois qu'il faut réaliser l'expérience pour voir apparaître un évènement A donné, de probabilité p.

2.7.6 Loi hypergéométrique (Tirage sans remise)

Exemple 8 : une urne contient $N = 20$ boules, parmi eux $N_1 = 8$ des boules blanches et les autre des boules noires et vertes. on tire au hasard $n = 5$ boules sans remise.
X est la v.a. qui représente le nombre de boules blanches tirées. Dans ce cas
$\mathcal{S}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Donc :
$\forall k \in \{0, 1, ..., 5\}, \quad P(X = k) = \dfrac{C_8^k \; C_{12}^{8-k}}{C_{20}^5}$
On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres $\mathcal{H}(n, N_1, N)$ tels que
$(n = 5, N_1 = 8, N = 20)$. On peut écrire aussi $X \sim \mathcal{H}(n, p, N)$ où
p est la probabilité des boules blanches c'est-à-dire $p = \frac{8}{20} = 0.4$.

On dit que la v.a X suit la loi hypergéométrique de paramètres (n, N_1, N) et l'on note $X \sim \mathcal{H}(n, N_1, N)$ si :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \quad P(X = k) = \frac{C_{N_1}^k \; C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n} \tag{2.10}$$

- **L'espérance de X :**

$$E(X) = np, \quad \text{où} \quad p = \frac{N_1}{N}$$

- **La variance de X :**

$$Var(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Remarque 2.3. Si $N \to \infty$, alors $\mathcal{H}(n, N_1, N)$ tend vers $\mathcal{B}(n, p = \frac{N_1}{N})$. En pratique, ce résultat s'applique dés que $\frac{n}{N} < 0.1$, c'est-à- dire dés que la population est 10 fois plus grande que l'échantillon, ce qui arrive fréquemment en sondages.

2.8 Variables aléatoire indépendantes

Soit X et Y des v.a et leurs loi de probabilité

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

et

$$\mathbf{Y} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix} \quad et \quad \sum_{i=1}^{m} q_i = 1$$

Définition 2.8. *Les v.a X et Y sont indépendantes si*

$$P\Big((X = x_i), (Y = y_j)\Big) = P(X = x_i)\ P(Y = y_j) = p_i\ q_j$$

pour $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., m$.

Chapitre 3

Variables aléatoires continues

Dans beaucoup de situations, on veut travailler avec des variables continues comme suit :

1. La durée de vie d'un appareil en mois $\in]0, t]$,
2. La taille en cm d'une personne $]0, 200]$,
3. le poids, La vitesse d'une voiture, ...

Soit Ω un ensemble muni d'une probabilité P. Une v.a X est dite continue si elle peut prendre toutes valeurs comprises dans un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

3.1 Fonction de répartition

Définition 3.1. *La fonction de répartition d'une v.a.c X est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{3.1}$$

Quelques propriétés de F_X

1) $F_X(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

2) F_X est une fonction croissante, c'est-à-dire si $x < y$, alors $F_X(x) < F_X(y)$;

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

Remarque 3.1. 1) $P(X = a) = 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2) $P(X \leq a) = P(X < a)$ car $P(X = a) = 0$.

3) $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a)$.

4) $P(X > a) = 1 - p(X \leq a) = 1 - F_X(a)$.

3.2 Densité de probabilité

Définition 3.2. *Une variable aléatoire X est **continue**, s'il existe une fonction $f_X(x)$, appelée **densité** de X telle que :*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \; = F_X(b) - F_X(a) \;\; pour \;\; tout \;\; a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$$

Elle a deux propriétés suivantes :

(i) $f_X(x) \geq 0,\;\; x \in \mathbb{R}$. (c'est-à-dire f_X est une fonction non négative).

(ii) La probabilité totale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

Ainsi F_X est une primitive de f_X, et f_X est donc la dérivée de F_X.

Question 01 : Vérifier que la fonction suivante est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$ *pour* $x \in]0, +\infty[$, *et* $\lambda > 0$. **Solution :**
On constate que $f(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, donc f est une fonction **non négative**, et **continue** sur $\mathbb{R}$ Et on a :
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx = 0 + \left(-e^{-\frac{x}{\lambda}} \,|_0^{+\infty} \right) = 0 - (-1) = 1$

Question 02 : Soit $f(x) = kx(1-x)^2$ pour $0 \leq x \leq 1$. Trouver k pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Solution :
f est une fonction non négative, et continue sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ donc :
$k \int_0^1 x(1-x)^2\,dx = k\,\frac{1}{12} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 12.$

Question 03 : Soit f_X la densité de la v.a X, tel que : $f_X(x) = x$ si $0 \leq x \leq 1$; et $f_X(x) = \frac{1}{2}$ si $1 < x \leq 2$. Trouver $P(X > 1)$, $P(X < 1)$, $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$.
Solution :
$P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}$;
$P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$
$P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} xdx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}dx = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

Question 04 : Soit X une v.a dont la densité est donnée par : $f(x) = \lambda\,e^{-\lambda\,x}$ si $x > 0$ où $\lambda > 0$. Trouver la fonction de répartition de X.
Solution : Pour $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$.
Pour $x \geq 0$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \lambda\,e^{-\lambda\,t}\,dt = 0 + \left(-e^{-\lambda\,t} \,|_0^x \right) = 1 - e^{-\lambda\,x}$.

Question 05 : Soit f une fonction est définie par : $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ si $-1 \leq x \leq 1$.
Montrer que $f(x)$ est une densité et trouver la fonction de répartition correspondant.
Solution : La fonction f est non-négative, continue sauf en $x = -1$ et $x = 1$. De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\, x^2 \, dx = \frac{x^3}{2} \mid_{-1}^{1} = 1$; donc f est une fonction de densité.
On trouve maintenant la fonction de répartition correspondante.
Pour $x < -1$, $F_X(x) = 0$.
Pour $-1 \leq x < 1$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \, dx + \int_{-1}^{x} \frac{3}{2}t^2 \, dt = \frac{t^3}{2} \mid_{-1}^{x} = \dfrac{x^3+1}{2}$.
Pour $x \geq 1$, $F_X(x) = 1$. (vérifier)

3.3 Espérance et variance d'une v.a.c

Définition 3.3. *Si X est une v.a.c et f_X sa fonction de densité, on appelle espérance de X la quantité suivante lorsqu'elle est bien définie :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) \, dx \tag{3.2}$$

Quelques propriétés de l'espérance

1. $E(a) = a$, où a est une constante.
2. Soient a, b deux nombres réels, et X, Y deux v.a,
$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$
3. $E(XY) = E(X)\, E(Y)$, si les v.a X et Y sont indépendantes.

Question 06 : Soit X une v.a dont la densité est donnée par : $f_X(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1$.
Trouver $E(X)$. **Solution :**
$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, dx = \int_0^1 2x^2 \, dx = \frac{2}{3}x^3 \mid_0^1 = \frac{2}{3}$

Question : 07 Soit X une v.a dont la densité est donnée par : $f_X(x) = \frac{2x}{a^2}$ si $0 \leq x \leq a$.
Trouver $E(X)$. **Solution :**
$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_X(x) \, dx = \int_0^a \frac{2x^2}{a^2} \, dx = \frac{2}{3}\frac{x^3}{a^2} \mid_0^a = \frac{2a}{3}$

Question 08 : Soit X une v.a dont la densité est donnée par : $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ si $x > 0$.
Trouver $E(X)$. **Solution :**
$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\ f_X(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x\ \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\ dx = 2$. En utilisant l'intégrale par partie.

Remarque 3.2. En général, si la densité de la v.a X de la forme $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda\, x}$ pour $x > 0$ et $\lambda > 0$, alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Question 09 : Soit X une v.a dont la densité est donnée par : $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a < x < b$.
Trouver $E(X)$. **Solution :** $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\ f_X(x)\ dx = \int_a^b x\ \frac{1}{b-a}\ dx = \frac{a+b}{2}$.

Remarque 3.3. Si la densité de la v.a X de la forme $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ pour $a < x < b$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Définition 3.4. *La variance d'une v.a X est*

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f_X(x)\ dx - E(X)^2 \tag{3.3}$$

Quelques propriétés de la variance

1. $Var(a) = 0$, où a est une constante.
2. $Var(aX) = a^2X$;
3. $Var(aX + b) = a^2Var(X)$.

Question 10 : Soit X une v.a dont la densité est donnée par : $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ si $x > 0$.
Trouver $Var(X)$. **Solution :**
$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2\ f_X(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x^2\ \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\ dx = 8$. En utilisant l'intégrale par partie.
Donc $Var(X) = 8 - 4 = 4$.

Remarque 3.4. En général, si la densité de la v.a X de la forme $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda\, x}$ pour $x > 0$ et $\lambda > 0$, alors $Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Question 11 : Soit X une v.a dont la densité est donnée par : $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a < x < b$. Trouver $Var(X)$. **Solution :** $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2\ f_X(x)\ dx = \int_a^b x^2\ \frac{1}{b-a}\ dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$.
Donc $Var(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$.

3.4 Lois de probabilités continues

3.4.1 Loi uniforme

On dit que la v.a X suit **la loi uniforme** sur l'intervalle $[a, b]$, si sa fonction de densité est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

On écrira alors $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. On constate que $\dfrac{1}{b-a}$ est une constante.
La fonction de répartition de la v.a.X :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x < b \\ 0 & si \quad x \geq b \end{cases}$$

L'espérance et **la variance de** X sont les suivantes :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad et \qquad var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

respectivement.

Question 12 : Soit $X \sim \mathcal{U}(0, 10)$. Calculer $P(X \leq 3)$, $P(X > 6)$, et $P(3 < X < 8)$.
Solution :
$P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{10} dx = \frac{3}{10}$
$P(X > 6) = \int_6^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{4}{10}$ ou $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6)$
$P(3 < X < 8) = \int_3^8 \frac{1}{10} dx = \frac{5}{10}$

3.4.2 Loi exponentielle

On dit que la v.a X suit **la loi exponentielle** de paramètre λ où $\lambda > 0$, si sa fonction de densité est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

On écrira alors $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
La loi exponentielle sert souvent à modéliser **le temps d'attente** dans un processus où des évènements se passent de manière aléatoire.
La fonction de répartition de X est :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad si \quad x \geq 0.$$

L'espérance et **la variance de** X sont les suivantes :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \quad et \quad var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

respectivement.

Question 13 : Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$. Trouver la fonction de répartition de X, et calculer $P(X \leq 3)$, $P(X > 6)$, et $P(3 < X < 8)$.
Solution : La fonction de répartition est : $F_X(x) = 1 - e^{-x}$.
$P(X \leq 3) = F_X(3) = 1 - e^{-3}$
$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = e^{-6}$
$P(3 < X < 8) = F_X(8) - F_X(3) = -e^{-8} + e^{-3}$

3.4.3 Loi normale (Laplace-Gauss)

On dit que la v.a X suit **la loi normale** de paramètres μ et σ^2, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, si la densité de X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \quad pour \;\; tout \;\; x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

On écrira alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
L'espérance et **la variance de** X sont :

$$E(X) = \mu; \quad et \quad Var(X) = \sigma^2$$

respectivement.

Cas particulier : si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on dit que la loi de X est **la loi normale centrée réduite**, et on notera par Z au lieu de X. Dans ce cas, on obtient la fonction de densité comme suite :

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad pour \;\; tout \;\; x \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Et on note par ϕ sa fonction de répartition qui est représentée à **la table 1** page 40.

Question 14 : Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer $P(Z \leq 2)$, $P(Z < -1)$, $P(Z > 2)$, et $P(\mid Z \mid < 1.96)$.

Solution : En utilisant table 1.

$P(Z \leq 2) = \phi(2) = 0.977200$

$P(Z < -1) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) = 0.158700$

$P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \phi(2)$

$P(\mid Z \mid < 1.96) = P(-1.96 < Z < 1.96) = \phi(1.96) - \phi(-1.96) = \phi(1.96) - [1 - \phi(1.96)]$

donc $P(\mid Z \mid < 1.96) = 2\phi(1.96) - 1 = 0.95$

Question 15 : Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Trouver a et b tels que $P(Z \leq a) = 0.582$, $P(Z \leq b) = 0.326$.

Solution : En utilisant table 2 ,on obtient

$a = 0.207$ et $P(Z \leq -b) = 1 - (0.326) = 0.674 \rightarrow -b = 0.4510 \rightarrow b = -0.451$.

Remarque 3.5. Soit la v.a X suit la loi normale de paramètres μ et σ^2, on peut écrire $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Et soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

En utilisant ce remarque pour calculer $P(X < a)$***,*** $P(X > a)$***,*** $P(a < X < b)$***, ...,*** ***où*** a ***et*** $b \in \mathbb{R}$***.***

Question 16 : 1) Soit $Y \sim \mathcal{N}(9, 25)$. Calculer $P(Y < 10)$.

2) Soit $X \sim \mathcal{N}(3.9)$. Calculer $P(X < 1)$ $P(2 < X < 5)$, $P(X > 0)$, et $P(\mid X - 3 \mid > 6)$.

Solution : En utilisant table 1.

1) On sait que $Y \sim \mathcal{N}(9, 25) \implies \dfrac{Y-9}{5} \sim \mathcal{N}(0,1)$, donc :

$P(Y < 10) = P\Big(\dfrac{Y-9}{5} < \dfrac{10-9}{5}\Big) = P(Z < \frac{1}{5}) = \phi(\frac{1}{5}) = 0.579300$

2)On sait que $X \sim \mathcal{N}(3, 9) \implies \dfrac{X-3}{3} \sim \mathcal{N}(0,1)$, donc :

$P(X < 1) = P\Big(\dfrac{X-3}{3} < \dfrac{1-3}{3}\Big) = P(Z < -0.67) = \phi(-0.67)$

$= 1 - \phi(0.67) = 1 - 0.748600 = 0.251400$

$$\begin{aligned}
P(2 < X < 5) &= P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) \\
&= P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \\
&= \Phi(0,67) - \Phi(-0,33) \\
&= 0,748\,600 - 1 + 0,629\,300 \\
&= 0,377\,900.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X > 0) &= P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) \\
&= P(Z > -1) \\
&= 1 - \Phi(-1) \\
&= 1 - (1 - \Phi(1)) \\
&= \Phi(1) \\
&= 0,841\,300.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(|X-3| > 6) &= P(-6 > X - 3 > 6) \\
&= P(X > 9) + P(X < -3) \\
&= P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right) + P\left(\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right) \\
&= P(Z > 2) + P(Z < -2) \\
&= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\
&= 2(1 - \Phi(2)) \\
&= 0,045\,600.
\end{aligned}$$

Question 17 : Soit $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Trouver a tel que $P(X < a) = 0.95$.

Solution : On a $X \sim \mathcal{N}(1, 4) \implies \frac{X-1}{2} \sim \mathcal{N}(0,1)$, et **en utilisant table 2** ,on obtient $P(X < a) = P\Big(\frac{X-1}{2} < \frac{a-1}{2}\Big) = \phi(\frac{a-1}{2}) = 0.95$. Donc $\frac{a-1}{2} = 1.644900$ et $a = 4.289800$.

Question 18 : Soit $X \sim \mathcal{N}(10, 25)$. Trouver a tel que $P(X \geq a) = 0.95$. (**En utilisant table 2**.)

3.4.4 L'approximation de la loi binomiale par une loi normale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ quand $n \to +\infty$, avec $\mu = n.p$ et $\sigma^2 = n.p.(1-p)$. En pratique, si $n > 25$, $n.p > 5$, et $n.(1-p) > 5$ alors on peut estimer la loi binomiale

Solution. $Z = \frac{X-10}{5}$ et en utilisant les tables on obtient

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= P\left(\frac{X-10}{5} \geq \frac{a-10}{5}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{a-10}{5}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{a-10}{5}\right) \\ &= 0,95 \end{aligned}$$

d'où $P(Z \leq \frac{a-10}{5}) = 0,05$. En utilisant les tables on obtient

$$\frac{a-10}{5} = -1,644\ 900$$

donc

$$a = (-1,644\ 900) \times 5 + 10 = 1,775\ 500.$$

par la loi normale.

3.4.5 L'approximation de la loi de Poisson par une loi normale

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ quand λ est grand, avec $\mu = \lambda$ et $\sigma^2 = \lambda$.

En pratique, si $\lambda > 20$.

Table 1.

Table de la fonction de répartition ϕ de la v.a $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\phi(x) = P(Z \leq x\ )\ \text{et}\quad \phi(-x) = 1 - \phi(x) \quad \text{pour} \quad x \in [0, 3.99]$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Table 2.

La table donne la valeur de x telle que

$$P(Z \leq x) = p \quad \text{où} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } p \in [0.5, 0.999].$$

p	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,0071	0,008	0,009
0,50	0,0000	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0201	0,0226
0,51	0,0251	0,0276	0,0301	0,0326	0,0351	0,0376	0,0401	0,0426	0,0451	0,0476
0,52	0,0501	0,0527	0,0552	0,0577	0,0602	0,0627	0,0652	0,0677	0,0702	0,0728
0,53	0,0753	0,0778	0,0803	0,0828	0,0853	0,0878	0,0904	0,0929	0,0954	0,0979
0,54	0,1004	0,1029	0,1055	0,1080	0,1105	0,1130	0,1156	0,1181	0,1206	0,1231
0,55	0,1257	0,1282	0,1307	0,1332	0,1358	0,1383	0,1408	0,1434	0,1459	0,1484
0,56	0,1510	0,1535	0,1560	0,1586	0,1611	0,1637	0,1662	0,1687	0,1713	0,1738
0,57	0,1764	0,1789	0,1815	0,1840	0,1866	0,1891	0,1917	0,1942	0,1968	0,1993
0,58	0,2019	0,2045	0,2070	0,2096	0,2121	0,2147	0,2173	0,2198	0,2224	0,2250
0,59	0,2275	0,2301	0,2327	0,2353	0,2379	0,2404	0,2430	0,2456	0,2482	0,2508
0,60	0,2534	0,2559	0,2585	0,2611	0,2637	0,2663	0,2689	0,2715	0,2741	0,2767
0,61	0,2793	0,2819	0,2845	0,2872	0,2898	0,2924	0,2950	0,2976	0,3002	0,3029
0,62	0,3055	0,3081	0,3107	0,3134	0,3160	0,3186	0,3213	0,3239	0,3266	0,3292
0,63	0,3319	0,3345	0,3372	0,3398	0,3425	0,3451	0,3478	0,3504	0,3531	0,3558
0,64	0,3585	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3745	0,3772	0,3799	0,3826
0,65	0,3853	0,3880	0,3907	0,3934	0,3961	0,3989	0,4016	0,4043	0,4070	0,4097
0,66	0,4125	0,4152	0,4179	0,4207	0,4234	0,4262	0,4289	0,4316	0,4344	0,4372
0,67	0,4399	0,4427	0,4454	0,4482	0,4510	0,4538	0,4565	0,4593	0,4621	0,4649
0,68	0,4677	0,4705	0,4733	0,4761	0,4789	0,4817	0,4845	0,4874	0,4902	0,4930
0,69	0,4959	0,4987	0,5015	0,5044	0,5072	0,5101	0,5129	0,5158	0,5187	0,5215
0,70	0,5244	0,5273	0,5302	0,5330	0,5359	0,5388	0,5417	0,5446	0,5476	0,5505
0,71	0,5534	0,5563	0,5592	0,5622	0,5651	0,5680	0,5710	0,5739	0,5769	0,5799
0,72	0,5828	0,5858	0,5888	0,5918	0,5948	0,5978	0,6008	0,6038	0,6068	0,6098
0,73	0,6128	0,6158	0,6189	0,6219	0,6250	0,6280	0,6311	0,6341	0,6372	0,6403
0,74	0,6434	0,6464	0,6495	0,6526	0,6557	0,6588	0,6620	0,6651	0,6682	0,6714
0,75	0,6745	0,6776	0,6808	0,6840	0,6871	0,6903	0,6935	0,6967	0,6999	0,7031
0,76	0,7063	0,7095	0,7127	0,7160	0,7192	0,7225	0,7257	0,7290	0,7323	0,7356
0,77	0,7389	0,7421	0,7454	0,7488	0,7521	0,7554	0,7587	0,7621	0,7655	0,7688
0,78	0,7722	0,7756	0,7790	0,7824	0,7858	0,7892	0,7926	0,7961	0,7995	0,8030
0,79	0,8064	0,8099	0,8134	0,8169	0,8204	0,8239	0,8274	0,8309	0,8345	0,8381
0,80	0,8416	0,8452	0,8488	0,8524	0,8560	0,8596	0,8632	0,8669	0,8706	0,8742
0,81	0,8779	0,8816	0,8853	0,8890	0,8927	0,8965	0,9002	0,9040	0,9078	0,9116
0,82	0,9154	0,9192	0,9230	0,9269	0,9307	0,9346	0,9385	0,9424	0,9463	0,9502
0,83	0,9542	0,9581	0,9621	0,9661	0,9701	0,9741	0,9782	0,9822	0,9863	0,9904
0,84	0,9945	0,9986	1,0027	1,0069	1,0110	1,0152	1,0194	1,0236	1,0279	1,0322
0,85	1,0364	1,0407	1,0451	1,0494	1,0537	1,0581	1,0625	1,0669	1,0714	1,0758
0,86	1,0803	1,0848	1,0894	1,0939	1,0985	1,1031	1,1077	1,1123	1,1170	1,1217
0,87	1,1264	1,1311	1,1359	1,1407	1,1455	1,1504	1,1552	1,1601	1,1651	1,1700
0,88	1,1750	1,1800	1,1850	1,1901	1,1952	1,2004	1,2055	1,2107	1,2160	1,2212
0,89	1,2265	1,2319	1,2372	1,2426	1,2481	1,2536	1,2591	1,2646	1,2702	1,2759
0,90	1,2816	1,2873	1,2930	1,2988	1,3047	1,3106	1,3165	1,3225	1,3285	1,3346
0,91	1,3408	1,3469	1,3532	1,3595	1,3658	1,3722	1,3787	1,3852	1,3917	1,3984
0,92	1,4051	1,4118	1,4187	1,4255	1,4325	1,4395	1,4466	1,4538	1,4611	1,4684
0,93	1,4758	1,4833	1,4909	1,4985	1,5063	1,5141	1,5220	1,5301	1,5382	1,5464
0,94	1,5548	1,5632	1,5718	1,5805	1,5893	1,5982	1,6073	1,6164	1,6258	1,6352
0,95	1,6449	1,6546	1,6646	1,6747	1,6850	1,6954	1,7060	1,7169	1,7279	1,7392
0,96	1,7507	1,7624	1,7744	1,7866	1,7991	1,8119	1,8250	1,8384	1,8522	1,8663
0,97	1,8808	1,8957	1,9110	1,9268	1,9431	1,9600	1,9774	1,9954	2,0141	2,0335
0,98	2,0537	2,0749	2,0969	2,1201	2,1444	2,1701	2,1973	2,2262	2,2571	2,2904
0,99	2,3264	2,3656	2,4089	2,4573	2,5121	2,5758	2,6521	2,7478	2,8782	3,0902

Note : Si $p < 0.5$, alors il suffit d'utiliser cette relation

$$P(Z < x) = p \Leftrightarrow P(Z < -x) = 1 - p$$

Chapitre 4

Fonctions caractéristiques

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire a plusieurs applications importantes en informatique, où elle permet de simplifier l'analyse et la manipulation des distributions de probabilités dans des systèmes complexes. Voici les principaux domaines d'application :

Apprentissage automatique et intelligence artificielle

Traitement du signal et de l'image ;

Files d'attente et modélisation des systèmes de services ;

Analyse de performance des algorithmes ;

Cryptographie et sécurité ; ...

4.1 Définition

On appelle fonction caractéristique de la variable aléatoire X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} , \quad \varphi_X(t) = E(e^{itX})$$

où i est la partie imaginaire qui vérifie $i^2 = 1$.

La fonction $\varphi_X(t)$ existe et est bien définie sur $\mathbb{R}$ car elle est borné (propriété 2).

Cas discret

$$E(e^{itX}) = \sum_x e^{itx} \, P(X = x)$$

Cas continu : si X admet une desité de probabilité alors,

$$E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, f_X(x) \, dx$$

4.2 Quelques propriétés d'une fonction caractéristique

1. $\varphi_X(0) = 1$, car :
   $\varphi_X(0) = E(e^{i(0)X}) = E(1) = 1.$
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mid \varphi_X(t) \mid \leq 1$, car :
   $\mid \varphi_X(t) \mid = \mid E(e^{itX}) \mid \leq E(\mid e^{itX} \mid) = E(1) = 1$
   et
   $\mid e^{itx} \mid = \mid cos(tx) + i\ sin(tx) \mid = \sqrt{cos^2(tx) + sin^2(tx)} = 1.$
3. $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$,
   où $\overline{z}$ est le conjugué du nombre complexe z.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\ \varphi_X(at), \forall t \in \mathbb{R}$
   car $\varphi_{aX+b}(t) = E\Big(e^{it(aX+b)}\Big) = E\Big(e^{itaX} \times e^{itb}\Big) = E(e^{itaX})\ E(e^{itb}) = e^{itb}\ \varphi_X(at)$
5. Soient X et Y deux variables aléatoire indépendantes. Alors

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\, \varphi_Y(t)$$

car $\varphi_{X+Y}(t) = E\Big(e^{it(X+Y)}\Big) = E\Big(e^{itX}\, e^{itY}\Big) = E\Big(e^{itX}\Big)\, E\Big(e^{itY}\Big) = \varphi_X(t)\, \varphi_Y(t).$

4.3 Quelques exemples

Chaque loi de probabilité a une fonction caractéristique unique, ce qui permet d'identifier les distributions en connaissant leur fonction caractéristique.

Cas discret

Loi de probabilité	Fonction caractéristéque
Bernouli $X \sim \mathcal{B}(p)$	$\phi_X(t) = 1 - p + p\, e^{it})$
Binomiale $X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$\phi_X(t) = \Big(1 - p + pe^{it}\Big)^n$
Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\phi_X(t) = e^{\lambda\, (e^{it} - 1)}$
Géométrique $X \sim \mathcal{G}(p)$	$\phi_X(t) = \dfrac{p\, e^{it}}{1 - (1 - p)e^{it}}$

Cas continu

Loi de probabilité	Fonction caractéristéque
Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ Cas particulier : si $a=-1$ et $b=1$	$\phi_X(t) = \dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$ $\phi_X(t) = \dfrac{sint}{t}$
Exponentielle $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$	$\phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
Normale centrée réduite $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ Normale (ou gaussienne)$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\phi_X(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$ $\phi_X(t) = e^{it\mu}\ e^{-\frac{t^2\ \sigma^2}{2}}$

4.4 Exercices

Exercice 01 (files d'attente)

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
   Trouver sa fonction caractéristique.
2. Un serveur web reçoit des demandes de façon aléatoire, chaque demande prend un certain temps pour être traitée. Supposons que T_i représente le temps de traitement de demande i, tel que T_i suit la loi exponentielle de paramètre λ, et le temps moyen de traitemet d'une demande est 0.5 minutes. Soit T le temps total de traitement de n demandes. Trouver la fonction caractéristique de T.
3. En déduire la loi de T.
4. Calculer la probabilité que le temps total de traitement de 3 demandes est 1.5 minutes.
5. Calculer la probabilité que les trois demandes soient traitées en moins de 1.5 minutes.

Exercice 02 (Bruit gaussien dans la transmission de données)

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2. Trouver la fonction caractéristique de X.
2. Supposons que dans un système de communication sans fil, un signal est transmis plusieurs fois pour renforcer la fiabilité de la tranmission. Chaque fois qu'un signal est transmis, il est affecté par un bruit gaussien.
   Soient X_1, X_2, et X_3 trois v.a représentant les bruits ajoutés au signal lors de chaque tranmission. On suppose que $X_i \sim \mathcal{N}(0,1),\ (i = 1, 2, 3)$.
   Si le bruit total S est la somme de trois bruits X_1, X_2, et X_3. Trouver la fonction caractéristique de S.
3. En déduire la loi de S. Interpréter ce résultat.

Solution

1. On a $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors la fonction caractéristique de X est donnée par :
$$\phi_X(t) = e^{it\mu}\ e^{-\frac{t^2\,\sigma^2}{2}}$$
2. Soit X_i une v.a représente le bruit i, tel que $X_i \sim \mathcal{N}(0,1),\ i = 1, 2, 3$. Donc la fonction caractéristique de X_i est donnée par : $\phi_{X_i}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.
   D'autre part, soit $S = \sum X_i = X_1 + X_2 + X_3$ le bruit total. Alors sa fonction caractéristique est :
$$\begin{aligned}
\phi_S(t) &= E(e^{itS}) = E\Big(e^{it(X_1+X_2+X_3)}\Big) = E\Big(e^{itX_1} \times e^{itX_2} \times e^{itX_3}\Big) \\
&= E(e^{itX_1}) \times E(e^{itX_2}) \times E(e^{itX_3}) \\
&= \phi_{X_1}(t) \times \phi_{X_2}(t) \times \phi_{X_3}(t) \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \times e^{-\frac{t^2}{2}} \times e^{-\frac{t^2}{2}} \\
&= e^{-3\frac{t^2}{2}}\ =\ e^{it\mu}\ e^{-\frac{t^2\,\sigma^2}{2}}
\end{aligned}$$
   tels que : $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 3$.
3. La loi de S est la loi normale de moyenne 0 et de variance 3.
   Interprétation : la somme de bruits gaussiens reste un bruit gaussien. En général, si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ alors $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Exercice 03 (modèle de comptages : nombre de requêtes sur un serveur)

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ (oú λ est le nombre moyen d'événements qui se produisent dans une période donnée).
   Trouver la fonction caractéristique de X.
2. Considérons un serveur qui reçoit en moyenne trois requêtes par minute pour traiter des données. Soient X_i le nombre de requêtes reçues par le serveur pendant la minute i, $i = 1, ..., n$, et $N = \sum_{i=1}^{n} X_i$ la somme (le nomre total) de requêtes reçues pendant n minutes.
   Trouver la fonction caractéristique de N.
3. En déduire la loi de la somme de N. Interpréter ce résultat.
4. Calculer la probabilité que le serveur reçoive 10 requêtes en 5 minutes.

Autre exemple de modèle de comptages : nombre d'erreurs de transmission dans un réseau.

Solution

1. On a $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors la fonction caractéristique de X est donnée par :
$$\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$
2. Soit X_i une v.a représente le nombre de requêtes reçues par le serveur pendant la minute i, tel que $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda),\ i = 1, ..., n$.
   D'autre part, soit $N = \sum X_i = X_1 + ... + X_n$ le le nomre total de requêtes reçues pendant n minutes. Alors sa fonction caractéristique est :
$$\begin{aligned}
\phi_N(t) &= E(e^{itN}) = E\Big(e^{it(X_1+...+X_n)}\Big) = E\Big(e^{itX_1} \times ... \times e^{itX_n}\Big) \\
&= E(e^{itX_1}) \times ... \times E(e^{itX_n}) \\
&= \phi_{X_1}(t) \times ... \times \phi_{X_n}(t) \\
&= e^{\lambda(e^{it}-1)} \times ... \times e^{\lambda(e^{it}-1)} \\
&= e^{n\lambda(e^{it}-1)}
\end{aligned}$$
3. La loi de N est la loi de Poisson de paramètre $n\,\lambda$.
   Interprétation : la somme de Poissons reste un Poisson. En général, si $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Exercice 04 (nombre de requêtes sur un serveur)

Un serveur web reçoit des requêtes en moyenne 2.1 par seconde.

1. Calculer la probabilité que ce serveur reçoive 2 requêtes dans une période de 3 secondes.
2. Calculer la probabilité que ce serveur ne reçoive aucune requête durant 3 secondes.

Solution

Soit X_i le nombre de requêtes reçues par le serveur pendant la seconde i, tel que
$X_i \sim \mathcal{P}(\lambda = 2.1),\ i = 1, ..., n$.
D'autre part, soit $N = \sum X_i = X_1 + ... + X_n$ le le nomre total de requêtes reçues pendant n secondes. D'après l'exercice 03, on a $N \sim \mathcal{P}(n\,\lambda)$. La loi de probabilité de N est :

$$P(N = k) = \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-(n\lambda)}\,,\quad k = 0, 1, 2, ...$$

1. $P(N = k)$ tels que : $k = 2, n = 3, \lambda = 2.1$.
2. $P(N = k)$ tels que : $k = 0, n = 3, \lambda = 2.1$.

Chapitre 5

Vecteurs aléatoires gaussiens

Un vecteur gaussien, qui est un vecteur de variables aléatoires suivant une distribution normale **multivariée**, a de nombreuses applications en informatique, notamment dans les domaines suivants :

* Apprentissage automatique et intelligence artificielle (ACP, MMG, ...),
* Traitement du signal et vision par ordinateur,
* Cryptographie et sécurité informatique (LWE),
* Optimisation et simulation numérique (CMA-EA),
* Télécommunications et réseaux (modélisation du bruit, MIMO),
* Finance quantitative et séries temporelles, ...

5.1 Covariance et coefficient de corrélation

Définition : soient X et Y deux variables aléatoires. La covariance de X et Y est définie comme suite :

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$$

Remarque : $cov(X,X) = E(XX) - E(X).E(X) = var(X)$

Propriétés :

1. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
2. Si a, b, c, et d sont des constantes, alors :

$$cov(aX+b, cY+d) = ac\, cov(X,Y)$$

car,

$$cov(aX+b, cY+d) = E\Big((aX+b).(cY+d)\Big) \; - \; E(aX+b).E(cY+d)$$

$$= E\Big(acXY + adX + bcY + bd\Big) \; - \; \Big(aE(X)+b\Big).\Big(cE(Y)+d\Big)$$

$$= acE(XY)+adE(X)+bcE(Y)+bd - acE(X).E(Y) - adE(X) - bcE(Y) - bd = ac\,cov(X,Y)$$

3. Si X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, alors $cov(X,Y)=0$.

Exercice 01 :

Soient $X \sim \mathcal{N}(0,2^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(1,3^2)$ et X est indépendante de Y.

1. Calculer $E(U) \;\; et \;\; var(U)$,telle que $U = X+2Y$.
2. Calculer $E(V) \;\; et \;\; var(V)$,telle que $V = X-Y$.
3. Calculer $cov(U,\ V)$.

Exercice 02 :

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que :

$$E(X)=2, \;\; E(Y)=3, \;\; var(X)=4, \;\; var(Y)=9, \;\; et \;\; E(XY)=12$$

1. Calculer $cov(3X-2, 5Y+4)$.
2. Vérifier si X et Y sont indépendantes.

Définition : soient X et Y deux variables aléatoires. Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est défini comme suit :

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y}$$

Remarques :

1. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
2. Si $\rho(X,Y)$ est proche de 1 ou -1 alors il existe une liaison linéaire très forte entre X et Y.
3. Si $\rho(X,Y)$ est proche de 0 alors il existe une liaison linéaire très faible entre X et Y.

Propriétés :

1. $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$

2. Si a, b, c, et d sont des nombres réels positifs, alors :

$$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$$

car,

$$\rho(aX + b, cY + d) = \frac{cov(aX + b, cY + d)}{\sqrt{var(aX + b)} \times \sqrt{var(cY + d)}} = \frac{ac \,.\, cov(X, Y)}{a\,\sigma_X \times c\,\sigma_Y} = \rho(X, Y)$$

3. Si X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, alors $\rho(X, Y) = 0$.

Exercice 03 :

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que :

$$E(X) = 5, \;\; E(Y) = -1, \;\; var(X) = 16, \;\; var(Y) = 25, \;\; et \;\; E(XY) = -14$$

1. Calculer $cov(2X + 3, -Y + 4)$, et déterminer $\rho(2X + 3, -Y + 4)$
2. Si $Z = 2X - 3Y$, calculer $E(Z)$ et $var(Z)$.

*Revoir l'exercice 01 série 05.

5.2 Définition d'un vecteur gaussien

Soit $(\Omega; \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

On dit que **le vecteur** $X = (X_1...X_n)^t$ est gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire réelle gaussienne. On peut écrire : Dans ce cas, X un vecteur gaussien de moyenne μ_X et de matrice de covariance Σ_X, tels que :

$$\mu_X = \begin{pmatrix} \mu_{X_1} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{pmatrix} \qquad et \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tel que : $\mu_{X_i} = E(X_i)$, $\;\; a_{ii} = var_{X_i} \; et \;\; a_{ij} = cov(X_i, X_i)$.

On peut écrire : $X \sim \mathcal{N}_n(\mu_X, \Sigma_X)$.

Exemple 01

Soit $X = (X_1 \;\; X_2 \;\; X_3)^t$ un vecteur gaussien de moyenne $\mu_X = (1\ 0\ 2)^t$ et de matrice de covariance :

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire : $E(X_1) = \mu_{X_1} = 1, \quad E(X_2) = \mu_{X_2} = 0, \quad E(X_3) = \mu_{X_3} = 2\,;$
$\sigma^2_{X_1} = var(X_1) = cov(X_1, X_1) = 2,$
$\sigma^2_{X_2} = var(X_2) = cov(X_2, X_2) = 3,$
$\sigma^2_{X_3} = var(X_3) = cov(X_3, X_3) = 4\,;$
$cov(X_1, X_2) = 0, \quad cov(X_1, X_3) = -1, \quad cov(X_2, X_3) = -2\,;$

Remarques

1. Si $X = (X_1 ... X_n)^t$ un vecteur gaussien de moyenne μ_X et de matrice de covariance Σ_X, alors les variables aléatoires X_i $(i = 1, ..., n)$ sont des variables gaussiennes de moyenne μ_{X_i} et de variance $\sigma^2_{X_i} = var(X_i) = cov(X_i, X_i)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires **gaussiennes** et $cov(X, Y) = 0$, alors X et Y sont des variables indépendantes.
3. Si les variables aléatoires X_i $(i = 1, ..., n)$ sont des variables gaussiennes et **indépendantes**, alors $X = (X_1 \ ... \ X_n)^t$ un vecteur gaussien de moyenne μ_X et de matrice de covariance Σ_X, tels que :

$$\mu_X = \begin{pmatrix} \mu_{X_1} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{X_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{X_n} \end{pmatrix}$$

4. Une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes **indépendantes** est une variable aléatoire gaussienne.
   Exemple : Soient $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. On suppose que X_1 est indépendante de X_2 alors $Y = aX_1 + bX_2 \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, avec

$$\mu_y = a\mu_1 + b\mu_2 \;\; et \;\; \sigma^2_Y = a^2\ \sigma_1^2 + b^2; \sigma_2^2$$

5.3 Loi d'un vecteur gaussien

Soit $X = (X_1 \, ... \, X_n)^t$ un vecteur gaussien de moyenne μ_X et de matrice de covariance Σ_X, on peut écrire $X \sim \mathcal{N}_n(\mu_X, \Sigma_X)$.
On définit un nouvel vecteur $Y = A\,X + B$, telles que
A est une matrice de m lignes et n colonnes ($A \in \mathcal{M}_{m\times n}$), et
B est une matrice de m lignes et une colonne($B \in \mathcal{M}_{m\times 1}$),
alors Y est un vecteur gaussien de moyenne μ_Y et de matrice de covariance Σ_Y. De plus :

$$\mu_Y = A\,\mu_X + B \quad et \quad \Sigma_Y = A\,\Sigma_X\,A^t$$

Exemple 02 ($m = 1$)

Soit $X \sim \mathcal{N}_{n=3}(\mu_X, \Sigma_X)$ tels que :

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

On définit la variable aléatoire $Y = X_1 - 2X_2 + X_3$, d'après la définition d'un vecteur gaussien, la variable Y est une v.a gaussienne de moyenne μ_Y et de variance σ_Y^2 car elle est une combinaison linéaire de composants du vecteur X. De plus :

$$Y = X_1 - 2X_2 + X_3 = A \times X = (1 \quad -2 \;\; 1) \times (X_1 \; X_2 \; X_3)^t$$

$$\mu_X = A\,\mu_X \; = (1 \quad -2 \;\; 1) \times (0 \; 1 \quad -1)^t \; = -3 \quad et \quad \sigma_Y^2 = A\,\Sigma_X\,A^t = ...(calculer)$$

Exemple 03 ($m > 1$)

Soit $X \sim \mathcal{N}_{n=2}(\mu_X, \Sigma_X)$ tels que :

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On définit le vecteur aléatoire Y comme suit

$$Y = \begin{pmatrix} 2X_1 - X_2 + 3 \\ X_2 + 1 \end{pmatrix}$$

On remaeque que :

$$Y = A\,X \,+\, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème précédent, le vecteur Y est un vecteur gaussien de moyenne μ_Y et de matrice de covariance Σ_Y. De plus :

$$\mu_Y = A\,\mu_X \,+\, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = ...\,(calculer)$$

et

$$\Sigma_Y = A\,\Sigma_X\,A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = ...\,(calculer)$$

Exemple 04 ($m > 1$)

Soit $X \sim \mathcal{N}_{n=4}(\mu_X, \Sigma_X)$ tels que :

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On définit le vecteur aléatoire Y comme suit

$$Y = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ 4X_2 + X_3 \\ X_4 - X_2 \end{pmatrix}$$

On remarque que :

$$Y = A\,X \,= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème précédent, le vecteur Y est un vecteur gaussien de moyenne μ_Y et de matrice de covariance Σ_Y. De plus :

$$\mu_Y = A\,\mu_X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = ... \in \mathcal{M}_{3\times 1}\,(calculer)$$

et

$$\Sigma_Y = A\,\Sigma_X\,A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ... \in \mathcal{M}_{3\times 3}\,(calculer)$$

Cas particulier

Soit $X = (X_1\ ...\ X_n)^t$ un vecteur gaussien de moyenne μ_X et de matrice de covariance Σ_X, on peut écrire $X \sim \mathcal{N}_n(\mu_X, \Sigma_X)$.
La loi du vecteur $Y = (X_1\ ...\ X_k)^t$, tel que $k \leq n$, est un vecteur gaussien de moyenne μ_Y et de matrice de cavariance Σ_Y, avec

$$\mu_X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma^2_{X_1} & cov(X_1, X_2) & \dots & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma^2_{X_2} & \dots & cov(X_2, X_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ cov(X_k, X_1) & cov(X_k, X_2) & \dots & \sigma^2_{X_k} \end{pmatrix}$$

Exemple 05

Soit $X \sim \mathcal{N}_{n=4}(\mu_X, \Sigma_X)$ tels que :

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 0.5 \\ 0 & -3 & 3 & -0.5 \\ -2 & 0.5 & -0.5 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Le vecteur aléatoire $Y = (X_1\ X_2\ X_3)^t$ est un vecteur gaussien de moyenne μ_Y et de matrice de covariance Σ_Y. De plus :

$$\mu_X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Le vecteur aléatoire $Z = (X_1\ X_2\ X_4)^t$ est un vecteur gaussien de moyenne μ_Z et de matrice de covariance Σ_Z. De plus :

$$\mu_Z = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_Z = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0.5 \\ -2 & 0.5 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Le vecteur aléatoire $W = (X_2\ X_4)^t$ est un vecteur gaussien de moyenne μ_W et de matrice de covariance Σ_W. De plus :

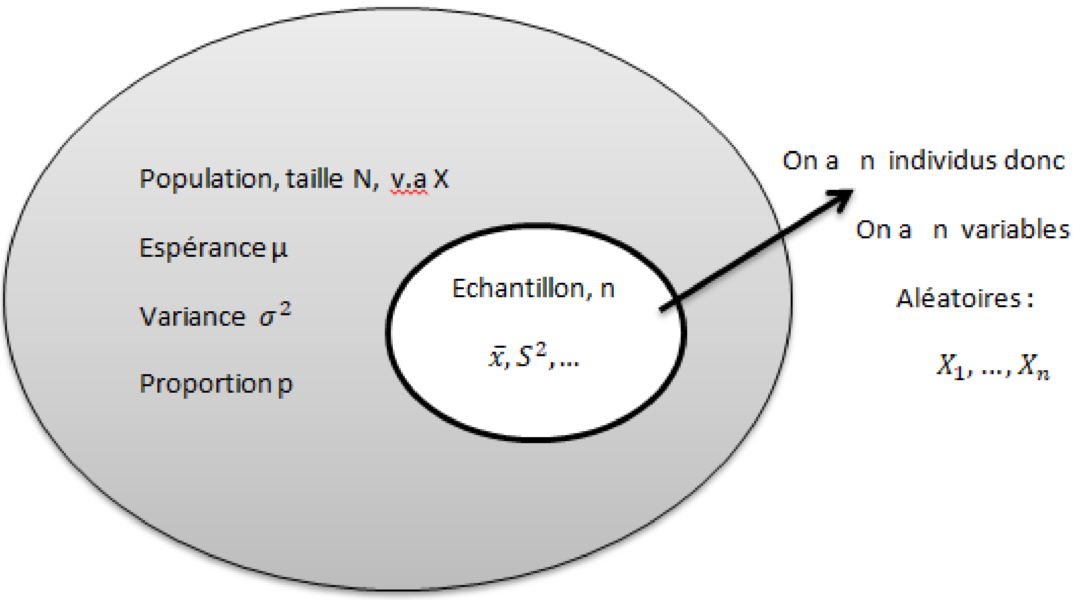
$$\mu_W = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad et \quad \Sigma_W = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 4 \end{pmatrix}$$

Chapitre 6

Estimation paramétrique et intervalle de confiance

Idée d'estimation

Estimer un paramètre définie sur une population (l'espérance μ, l'écart-type σ, proportion p,...) à partir d'observations réalisées $x_1, .., x_n$ sur un échantillon de cette population.



6.1 Estimation ponctuelle

6.2 Estimation par intervalle de confiance